Übungen zur Vorlesung „Analysis I“
im WiSe 2013/14 bei Prof. V. Bangert

Blatt 12 — 20. Januar 2014

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. *(2 Punkte)* Skizzieren Sie ein Schrägbild des Graphen der Funktion $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$.

2. *(5 Punkte)*

   (a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \cdot y^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

   Zeigen Sie:

   i. f ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und unstetig am Punkt Null.

   Hinweis: Sie können eine Folge $((x_k, y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{k\to\infty}(x_k, y_k) = (0,0)$ und $f(x_k, y_k) = \frac{1}{2}$ finden.

   ii. Ist G eine Gerade durch die Null, so ist die Einschränkung $f|_G$ stetig.

   (b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$, die Funktion $y \mapsto f(x,y)$ und für alle $y \in \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto f(x,y)$ stetig ist. Folgt dann, dass f stetig ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. *(2 Punkte)* Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Gleichung $x^7 + 3x^2 - 1 = 0$ eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$ besitzt.

4. *(3 Punkte)* Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, so dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt. Zeigen Sie: $f = g$, das heißt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

5. *(4 Punkte)* Seien $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2-x} - \frac{4}{4-x^2}$, $g : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \frac{z^4-1}{z^2+1}$. Bestimmen Sie die Grenzwerte:

   $$\lim_{x\to 2} f(x) \quad \lim_{x\nearrow -2} f(x) \quad \lim_{x\searrow -2} f(x) \quad \lim_{z\to i} g(z).$$

Abgabe: Montag, 27. Januar, bis 18 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Inklusionsabbildung ι_E von E in $\mathbb{R}^n$, $\iota_E(x) = x$, stetig ist. Folgern Sie daraus, dass für jede stetige Funktion $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $E \subseteq D$, die Restriktion $f|_E : E \to \mathbb{R}^m$ stetig ist.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$. Wir bezeichnen mit $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, die Projektion auf die i-te Komponente.

   (a) Zeigen Sie, dass p_i für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ eine Lipschitz-stetige Abbildung mit Lipschitz-Konstante 1 ist.

   (b) Leiten Sie aus a) ab, dass die Multiplikation $m : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $m(x, y) = x \cdot y$, reeller Zahlen stetig ist, indem Sie sich überlegen, dass $m = p_1 \cdot p_2$ gilt.

   (c) Zeigen Sie, dass die Multiplikation $M : \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, $M(w, z) = w \cdot z$, komplexer Zahlen stetig ist.