Übungen zur Vorlesung „Analysis I“
im WiSe 2013/14 bei Prof. V. Bangert

Blatt 13 27. Januar 2014

Bitte geben Sie auf Ihren Lösungen die Nummer Ihrer Übungsgruppe und Ihren Namen an.

1. *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass für $\alpha > 0$ die Funktion

$$f : [0, \infty) \mapsto [0, \infty); \quad f(x) = x^\alpha = \begin{cases} e^{\alpha \ln(x)}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

   streng monoton wachsend und stetig ist, und dass $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

2. *(6 Punkte)* Wir definieren die Funktion tanh (Tangens hyperbolicus) durch

$$\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass sinh, vgl. Definition in Anwesenheitsaufgabe 2, eine Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt; diese wird mit Area Sinus hyperbolicus bezeichnet.

   (b) Zeigen Sie, dass tanh eine Umkehrfunktion $\operatorname{artanhh} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ besitzt; diese wird mit Area Tangens hyperbolicus bezeichnet.

   (c) Leiten Sie die Formel

$$\operatorname{arsinh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

   her.

   (d) Leiten Sie für $|y| < 1$ die Formel

$$\operatorname{artanh}(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right)$$

   her

3. *(4 Punkte)* Zeigen Sie für alle $t \in [-1, 1]$ folgende Gleichung:

$$-\arccos t + \frac{\pi}{2} = \arcsin t.$$

4. *(2 Punkte)* Beweisen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Kosinus:

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x, y, x + y \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

   Vgl. Definition in Anwesenheitsaufgabe 1.

Abgabe: Montag, 03. Februar, bis 18 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben

1. Wir definieren die Funktionen tan (Tangens) und cot (Cotangens) durch

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)};$$
$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}, \quad \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

   (a) Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ und $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$.

   (b) Begründen Sie, dass $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ eine Umkehrfunktion besitzt; diese wird mit $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ (Arcus Tangens) bezeichnet. Entsprechend besitzt $\cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ eine Umkehrfunktion; diese wird mit $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ (Arcus Cotangens) bezeichnet.

2. Wir definieren die Funktionen sinh (Sinus hyperbolicus) und cosh (Cosinus hyperbolicus) durch

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ und } \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

   (a) Zeigen Sie, dass folgende Formel für alle $x \in \mathbb{R}$ richtig ist:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

   (b) Zeigen Sie: sinh ist eine ungerade und cosh ist eine gerade Funktion.

   (c) Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellung von sinh.