Probeklausur zur Vorlesung „Analysis I“
im WiSe 2013/14 bei Prof. V. Bangert

10. Februar 2014

Diese Probeklausur soll Ihnen einen Eindruck von den Anforderungen der Klausur vermitteln. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben ist dem der Klausuraufgaben ähnlich. Die Probeklausur gibt jedoch keinen Aufschluss über Aufgabentypen und Themenauswahl in der Klausur. Lösungen zur Probeklausur werden ab dem 26.2.14 auf der Homepage zur Vorlesung abrufbar sein. Bitte bearbeiten Sie die Aufgaben in Ihrem eigenen Interesse zunächst ohne Lösungshilfe und vergleichen Sie dann Ihre Ergebnisse mit der Musterlösung. Es wird nicht erwartet, dass Sie alle Aufgaben innerhalb von zwei Stunden lösen.

1. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche nicht wahr? Geben Sie entweder eine kurze Begründung (keinen vollständigen Beweis) oder ein Gegenbeispiel (ohne Begründung).

   (a) Es seien x, y reelle Zahlen, x sei rational und y sei irrational. Dann ist $x+y$ irrational.

   (b) Es seien x, y irrationale reelle Zahlen. Dann ist $x \cdot y$ irrational.

   (c) Für jede reelle Zahl a existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von rationalen Zahlen, so dass $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

   (d) Für jede reelle Zahl a existiert eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von irrationalen Zahlen, so dass $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

   (e) Die Dualentwicklung einer irrationalen Zahl ist nicht endlich (d.h. es gilt nicht, dass fast alle Stellen der Dualentwicklung gleich 0 sind).

2. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind nach oben beschränkt, welche nicht? Geben Sie eine kurze Begründung (keinen vollständigen Beweis).

   (a) $M = \{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

   (b) $M = \left\{\ln(\sin(\frac{1}{n})) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

   (c) $M = [0, 1)$

   (d) $M = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } -x^5 - 3x^3 + 5x > 1\}$

3. Seien a, $b > 0$. Zeigen Sie:
$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

4. Für die Zahlenfolge $(a_n)_{n\geq 0}$ gelte $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und
$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+1)} \text{ für alle } n \ge 0$$
   Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:
   Für alle $n \ge 0$ gilt: $a_{2n} = 0$ und $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$.

5. Konvergieren die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \cos(n\pi)$

(b) $a_n = \dfrac{3n^2+2}{4n^2+n+1}$

(c) $a_n = \dfrac{n!}{a^n}$, $a \neq 0$

6. Welche der folgenden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergieren?

   (a) $a_n = \dfrac{n^5+4n^2}{n^6+1}$

   (b) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

   Begründen Sie Ihre Antwort.

7. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die folgende Reihe?

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\ln(x))^n, \quad (x > 0)$$

   Begründen Sie Ihre Antwort.

8. Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender komplexen Potenzreihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n.$$

   Begründen Sie Ihre Antwort.

9. Bestimmen Sie folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} \cosh(x).$$

   Begründen Sie Ihre Antwort.

10. Es sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, also ein $x \in [0,1]$ mit $f(x) = x$.

    Anleitung: Betrachten Sie $g : [0,1] \to [-1,1]$, $g(x) = f(x) - x$.

11. Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen.

    (a) $\ln(\sin(x)+2) \cdot x^2$

    (b) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

    Begründen Sie Ihre Antwort.

12. Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und beschränkt. Beweisen Sie:

    Es existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ und $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$.

    Hinweis: Mittelwertsatz.

13. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

    (a) Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in (0, \varepsilon)$ gilt: $|\ln(x)| > |x^{-\frac{1}{2}}|$.

    (b) Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in (0, \varepsilon)$ gilt: $|\ln(x)| < |x^{-\frac{1}{2}}|$.

    Begründen Sie Ihre Antwort.

14. Sei $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1$$

    in Polardarstellung an. Begründen Sie Ihre Antwort.