Prof. Dr. V. Bangert 23.10.2014

Analysis III

WS 2014/15 — Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 30. Oktober, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Seien X eine Menge und I eine beliebige Indexmenge. Seien weiter für alle $i \in I$ die Teilmengen $A_i \subset X$ gegeben. Zeigen Sie die Darstellungen

$$\bigcap_{i\in I} A_i = X \setminus (\bigcup_{i\in I} X \setminus A_i) \qquad \text{und} \qquad \bigcup_{i\in I} A_i = X \setminus (\bigcap_{i\in I} X \setminus A_i).$$

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Sei X eine Menge.

a) Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A} := \left\{ A \subset X \;\middle|\; A \text{ oder } X \setminus A \text{ ist abzählbar} \right\}$$

eine σ-Algebra ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ die von

$$M := \left\{ A \subset X \;\middle|\; A \text{ ist endlich} \right\}$$

erzeugte σ-Algebra ist.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{B} := \left\{ B \subset Y \;\middle|\; f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \right\}$$

eine σ-Algebra auf Y ist.

Aufgabe 4: **3 Punkte**

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Zeigen Sie: Es existiert genau ein Maß μ auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mu(\{n\}) = a_n$. Zeigen Sie weiter, dass μ genau dann endlich ist, wenn $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty$ gilt.

Bemerkung: Wählt man zu $\lambda > 0$ die Folge $a_n := \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, $n \in \mathbb{N}$, so erhalten wir in Aufgabe 4 die aus der Stochastik bekannte Poissonverteilung. Diese beschreibt die Häufigkeit eines Ereignisses innerhalb einer gewissen Zeit, wie z. B. die Anzahl der α-Teilchen, die eine radioaktive Substanz pro Sekunde aussendet. Ist $A \subset \mathbb{N}$, so ist $\mu(A)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zahl der ausgestrahlten α-Teilchen in A liegt.

Bitte werfen Sie Ihre gehefteten und mit Namen sowie Gruppennummer versehenen Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1.