Prof. Dr. V. Bangert 08.01.2015

Analysis III

WS 2014/15 — Blatt 10

Abgabe: Donnerstag, 15. Januar, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und f eine nichtnegative μ-messbare Funktion auf X. Wir definieren für $A \in \mathcal{A}$ die Mengenfunktion

$$\mu_f(A) := \int_A f \, d\mu = \int_X f \, \chi_A \, d\mu.$$

Man nennt f die *Dichte* von μ_f bezgl. μ. Zeigen Sie

a) μ_f ist ein Maß auf $\mathcal{A}$.

b) Aus $\mu(A) = 0$ folgt $\mu_f(A) = 0$.

c) Es gilt für alle μ-messbaren nichtnegativen Funktionen g: $\int_X g \, d\mu_f = \int_X f \, g \, d\mu$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei $1 \leq p < \infty$ und $f_n, f \in L^p$ mit $f_n \to f$ fast überall und $\|f_n\|_{L^p} \to \|f\|_{L^p}$. Zeigen Sie, dass $f_n \to f$ in L^p gilt.

Tipp: Wenden Sie das Lemma von Fatou auf $\varphi_n := 2^{p-1}(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$ an.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Für eine Funktion $f : X \times [0,1] \to \mathbb{R}$ gelte:

(i) Für alle $x \in X$ ist die Funktion $f^x : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f^x(y) := f(x,y)$ stetig, und

(ii) Für alle $y \in [0,1]$ ist die Funktion $f_y : X \to \mathbb{R}$, $f_y(x) := f(x,y)$, $\mathcal{A}$-messbar.

Zeigen Sie, dass f $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-messbar ist ($\mathcal{B}$ ist die Borel-σ-Algebra auf $[0,1]$).

Aufgabe 4: (Fundamentallemma der Variationsrechnung) **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei für $1 \leq p \leq \infty$ die Funktion $f \in L^p(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega f\varphi \, d\lambda^n \geq 0 \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^0(\Omega) \text{ mit } \varphi \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass $f(x) \geq 0$ für λ^n-fast alle $x \in \Omega$ gilt.

Tipp: Verwenden Sie die Methode aus dem Beweis von Satz 9.17 sowie die Aufgabe 3 von Blatt 7.

Bitte werfen Sie Ihre gehefteten und mit Namen sowie Gruppennummer versehenen Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1.