Analysis III

WS 2014/15 — Blatt 11

Abgabe: Donnerstag, 22. Januar, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

a) Wir definieren

$$Z := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z \in [0,1],\ |x| \leq 1\}, \qquad \text{(Zylinder)}$$
$$H := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid z \in [0,1],\ |x| \leq \sqrt{1-z^2}\}. \qquad \text{(Halbkugel)}$$

Berechnen Sie das 3-dimensionale Volumen von Z und H.

b) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ eine abgeschlossene Menge und $t > 0$. Wir definieren den schiefen Kegel mit Spitze in $(0,0,t)$ durch

$$K := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = (\frac{t-z}{t}\, y, z) \text{ für } z \in [0,t],\ y \in G\}.$$

Skizzieren Sie zunächst für $t = 1$ und $G = [1,2] \times [2,3] \subset \mathbb{R}^2$ die Menge K. Zeigen Sie im allgemeinen Fall: K ist eine λ^3-messbare Menge und berechnen Sie $\lambda^3(K)$ in Abhängigkeit von $\lambda^2(G)$ und t.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Gegeben ist das Dreieck $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x,\ 0 \leq y \text{ und } x + y \leq 1\}$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 60\, xy^2$. Berechnen Sie $\int_\Delta f \, d\lambda^2$.

Aufgabe 3: **4 (+2) Punkte**

Es sei $h \in L^1(\lambda^n)$ und $h(x) \geq 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie

a) $M := \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 \leq x_{n+1} < h(x)\}$ ist λ^{n+1}-messbar.

b) $\lambda^{n+1}(M) = \int_{\mathbb{R}^n} h \, d\lambda^n$.

Bonusaufgabe: Beweisen Sie a), wenn $x_{n+1} < h(x)$ durch $x_{n+1} \leq h(x)$ ersetzt wird.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Es seien $\varphi_+, \varphi_- : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, und es gelte $\varphi_-(x) \leq \varphi_+(x)$ für alle $x \in \Omega$. Es sei

$$M := \{(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R} \;\big|\; \varphi_-(x) < t < \varphi_+(x)\}.$$

Schließlich sei $h : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ stetig und in der letzten Variablen stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass $\partial_{n+1} h \in \mathcal{L}^1(\lambda^{n+1}|_M)$ und

$$\int_M \partial_{n+1} h \, d\lambda^{n+1} = \int_\Omega h(x, \varphi_+(x)) - h(x, \varphi_-(x)) \, d\lambda^n(x)$$

gilt.

Bitte werfen Sie Ihre gehefteten und mit Namen sowie Gruppennummer versehenen Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1.