Analysis III

WS 2014/15 — Blatt 12

Abgabe: Donnerstag, 29. Januar, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\, x \leq 0,\, y \geq 0\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2 - xy + y^2$. Berechnen Sie $\int_D f \, d\lambda^2$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Hyperbolische Polarkoordinaten (r, ϑ) in der Ebene sind durch die Formeln $x = r \cosh(\vartheta)$, $y = r \sinh(\vartheta)$ gegeben.

a) Bestimmen Sie eine möglichst große offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$, so dass die Abbildung $F : U \to F(U) \subset \mathbb{R}^2$, $F(r,\vartheta) = (r \cosh(\vartheta), r \sinh(\vartheta))$, ein Diffeomorphismus ist. Bestimmen Sie $F(U)$.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Menge, die für ein festes $t > 0$ von den Geradensegmenten $\{(x,0) \,|\, 0 \leq x \leq 1\}$ und $\{\lambda(\cosh(t), \sinh(t)) \,|\, 0 \leq \lambda \leq 1\}$ und dem Hyperbelbogen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y^2 = 1,\, 1 \leq x \leq \cosh(t),\, y \geq 0\}$ begrenzt wird. Fertigen Sie eine Skizze an.

Aufgabe 3: (Guldinsche Regel) **4 Punkte**

Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und λ^n-messbar mit $\lambda^n(A) > 0$, so heißt der Punkt $s \in \mathbb{R}^n$ mit den Koordinaten

$$s_i = \frac{1}{\lambda^n(A)} \int_A x_i \, d\lambda^n(x), \quad i = 1, \ldots, n$$

der *Schwerpunkt* von A.

Sei G eine beschränkte und λ^2-messbare Teilmenge der y-z-Ebene im $\mathbb{R}^3$ mit $\lambda^2(G) > 0$, und G liege ganz in der Halbebene $y > 0$. Die Teilmenge M des $\mathbb{R}^3$ entstehe durch Rotation von G um die z-Achse.

a) Geben Sie eine formale Beschreibung von M und zeigen Sie, dass M messbar ist.

b) Sei a der Abstand des Schwerpunkts s von G von der z-Achse. Beweisen Sie die Guldinsche Regel

$$\lambda^3(M) = 2\pi a \lambda^2(G).$$

Verwenden Sie Polarkoordinaten in der x-y-Ebene.

Bitte wenden...

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Seien $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Approximationsmengen der Cantormenge aus Aufgabe 5, Blatt 5 mit $C = \cap_{n\in\mathbb{N}} T_n$ und $\lambda^1(T_n) = (\frac{2}{3})^n$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$g_n(t) := \left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_{T_n}(t) \qquad \text{und} \qquad f_n(x) := \int_0^x g_n(t)\, dt.$$

Zeigen Sie

a) $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$ und f_n ist monoton. Weiter gilt, dass f_n konstant auf jeder Zusammenhangskomponente von $[0,1] \setminus T_n$ ist.

b) Es gilt $\int_I g_n(t)\, dt = \int_I g_{n+1}(t)\, dt = 2^{-n}$ für jede Zusammenhangskomponente I von T_n.

c) Es gilt $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ für $x \notin T_n$ und $|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq 2^{-n+1}$ für $x \in T_n$.

d) Folgern Sie daraus die Existenz einer stetigen, monotonen Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ und $f' = 0$ λ^1-fast überall in $[0,1]$.

Bemerkung: Dies zeigt, dass der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung nicht zu gelten braucht, wenn die Ableitung nur λ^1-fast überall existiert.

Bitte werfen Sie Ihre gehefteten und mit Namen sowie Gruppennummer versehenen Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1.