Analysis III

WS 2014/15 — Blatt 13

Abgabe: Donnerstag, 05. Februar, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Skizzieren Sie die Fläche $f(E)$ und berechnen Sie den 2-dimensionalen Flächeninhalt von f auf E, wobei E, f wie folgt gegeben sind:

a) $E := (0, 2\pi) \times (0, 1)$, $f : E \to \mathbb{R}^3$, $f(\varphi, h) := (\cos\varphi, \sin\varphi, h)^T$,

b) $E := (0, 2\pi) \times (0, 1)$, $f : E \to \mathbb{R}^3$, $f(\varphi, r) := (r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi, r)^T$,

c) $E := (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ und für festes $0 < r < R$

$$f : E \to \mathbb{R}^3, \quad f(\theta, \varphi) := \begin{pmatrix} (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ (R + r\cos\theta)\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^{n+k})$ und $F : \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine Ähnlichkeitsabbildung, d.h. es existiert $A \in \mathcal{O}(n+k)$ (also $A \in GL(n+k, \mathbb{R})$, $A^T A = E_{n+k}$), $s > 0$ und $a \in \mathbb{R}^{n+k}$ mit $F(x) = s\,Ax + a$. Zeigen Sie: Ist $E \subset U$ λ^n-messbar, so gilt $A_E(F \circ f) = s^n A_E(f)$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Finden Sie ein Beispiel einer linearen Abbildung $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\det S = 1$, einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eines $f \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$, so dass $A_E(S \circ f) \neq A_E(f)$ gilt.

Tipp: Betrachten Sie z.B. die Fläche $(0, 1)^2 \times \{0\}$ und ein S mit $S(x, 0) = (2x, 0)$ für $x \in \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ eine Immersion.

a) Die von f auf U induzierte "Riemannsche Metrik" ${}^f g =: g$ ist die Abbildung, die $x \in U$ das Skalarprodukt g_x auf $\mathbb{R}^n$, $g_x(v, w) := \langle Df(x)v, Df(x)w \rangle$, zuordnet. Zeigen Sie, dass g_x in der Tat ein Skalarprodukt ist.

b) Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C^1$, so heißt

$$L^g(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}\, dt$$

die Länge von γ bezüglich g. Zeigen Sie $L^g(\gamma) = L(f \circ \gamma)$ (wobei für $f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^{n+k}$ die übliche Länge $L(f \circ \gamma) = \int_a^b |(f \circ \gamma)'(t)|\, dt$ verwendet wird).

Bitte werfen Sie Ihre gehefteten und mit Namen sowie Gruppennummer versehenen Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1.