Prof. Dr. V. Bangert 30.10.2014

Analysis III

WS 2014/15 — Blatt 2

Abgabe: Donnerstag, 6. November, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A})$ eine messbarer Raum und $E \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass die Indikatorfunktion

$$\chi_E : X \to \mathbb{R}, \qquad \chi_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in E \\ 0 & \text{falls } x \notin E, \end{cases}$$

$\mathcal{A}$-$\mathcal{P}(\mathbb{R})$-messbar (und somit $\mathcal{A}$-$\mathcal{C}$-messbar für jede σ-Algebra $\mathcal{C}$ auf $\mathbb{R}$) ist.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Sei $X := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, also der Raum aller Folgen $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $x_i \in \{0,1\}$. Für $i \in \mathbb{N}$ sei die Abbildung $f_i : X \to \{0,1\}$ durch $f_i(x) := x_i$ definiert. Sei weiter $\mathcal{A}$ die von $(f_i, \mathcal{P}(\{0,1\}))_{i\in\mathbb{N}}$ auf X induzierte σ-Algebra, d. h.

$$\mathcal{A} := \sigma\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i^{-1}\Big(\mathcal{P}(\{0,1\})\Big)\Big).$$

Zeigen Sie: Für jede Teilmenge A von $\mathbb{N}$ und jedes $x \in X$ gilt

$$\Big\{y \in X \;\Big|\; \forall i \in A \text{ gilt } y_i = x_i\Big\} \in \mathcal{A}.$$

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei $U \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge. Zeigen Sie

a) Für alle $x \in U$ gibt es genau ein maximales, in U enthaltenes, offenes Intervall $I_x = (a,b)$ mit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, welches x enthält.

b) U lässt sich als abzählbare Vereinigung disjunkter, offener Intervalle darstellen.

Tipp: In jeder nicht-leeren, offenen Teilmenge von $\mathbb{R}$ liegt eine rationale Zahl.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ Borelmengen sind

a) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{n^2+1}, \frac{1}{n^2}]$,

c) die Menge A aller Zahlen $x \in [0,1)$, in deren Dezimaldarstellung eine Ziffer "3" vorkommt.

Aufgabe 5: **3 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Zeigen Sie, dass f Borel-messbar ist.

Bitte werfen Sie Ihre gehefteten und mit Namen sowie Gruppennummer versehenen Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1.