Analysis III

WS 2014/15 — Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, 13. November, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: **7 Punkte**

Sei I eine beliebige Menge und $a : I \to [0,\infty]$ eine Abbildung, die jedem $i \in I$ ein $a_i \in [0,\infty]$ zuordnet. Man definiert $\sum_{i\in I} a_i \in [0,\infty]$ durch

$$\sum_{i\in I} a_i := \sup\Big\{ \sum_{i\in F} a_i \;\Big|\; F \subset I,\ F \text{ ist endliche Menge} \Big\}.$$

Zeigen Sie: Ist $(E_j)_{j\in J}$ eine disjunkte Zerlegung von I, d. h. es gilt $E_j \cap E_k = \emptyset$ für $j,k \in J$, $j \neq k$ sowie $\bigcup_{j\in J} E_j = I$, so folgt

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in E_j} a_i\Big).$$

Bemerkung: Sie können als bekannt voraussetzen, dass die Aussage für endliche Mengen I gilt. Für $I = \mathbb{N}$ stimmt diese Definiton mit der üblichen Konvergenz von Reihen (als Grenzwert von Partialsummen) überein. Diese Aufgabe liefert die formale Begründung für die Rechnungen im Beweis von Satz 3.7 sowie in Blatt 1, Aufgabe 4.

Aufgabe 2: **2 Punkte**

Sei $A \subset [0,1]$ eine Menge, auf der die Funktionenfolge $f_n : [0,1] \to [0,1]$, $f_n(x) := x^n$, gleichmäßig konvergiert. Zeigen Sie: Es existiert ein $\epsilon > 0$ mit $A \cap (1-\epsilon, 1) = \emptyset$.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Es sei $\mathcal{Q}$ die Menge der (endlichen) offenen Intervalle in $\mathbb{R}$ und $\lambda : \mathcal{Q} \to [0,\infty)$ die Mengenfunktion, die einem Intervall $I \in \mathcal{Q}$ seine Länge zuordnet, d. h.

$$\lambda(I) := \begin{cases} b-a & \text{für } I = (a,b) \text{ mit } a < b \in \mathbb{R}, \\ 0 & \text{für } I = \emptyset. \end{cases}$$

Mit λ^1 sei das von $(\mathcal{Q}, \lambda)$ nach Satz 3.7 induzierte äußere Maß auf $\mathbb{R}$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass für alle $a \leq b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda^1([a,b]) = b - a.$$

Zeigen Sie dazu zunächst per Widerspruch: Ist $(I_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von offenen Intervallen und gilt $[a,b] \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $[a,b] \subset \bigcup_{i\leq n} I_i$.

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to Y$. Sei $\mathcal{B} := \{B \subset Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ die σ-Algebra von Blatt 1, Aufgabe 3. Zeigen Sie: $f(\mu) : \mathcal{B} \to [0,\infty]$, $f(\mu)(B) := \mu(f^{-1}(B))$ definiert ein Maß auf $(Y, \mathcal{B})$.

Bitte werfen Sie Ihre gehefteten und mit Namen sowie Gruppennummer versehenen Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1.