Analysis III

WS 2014/15 — Blatt 4

Abgabe: Donnerstag, 20. November, vor Beginn der Vorlesung.

Definition: Für $A, B \subset X$ definieren wir die *symmetrische Differenz* $A \Delta B$ durch

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(X)$, versehen mit der symmetrischen Differenz Δ als Addition und der Durchschnittsbildung $\cap$ als Multiplikation, ein kommutativer Ring (im Sinn der Algebra) mit Nullelement $\emptyset$ und Einselement X ist.

Bemerkung: Von den vielen Dingen, die dabei nachgeprüft werden müssen, sollen Sie nur zeigen, dass $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ eine abelsche Gruppe mit Nullelement $\emptyset$ ist und das Distributivgesetz gilt.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen

a) $\mathcal{R}$ ist ein Ring über X (im Sinne der Vorlesung).

b) $\mathcal{R}$ ist ein Unterring von $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ (im Sinne der Algebra).

Bemerkung: Dies rechtfertigt den Namen "Ring" in der Vorlesung.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Finden Sie ein nicht reguläres äußeres Maß.

Tipp: Betrachten Sie eine einfache Menge der Form $X = \{1, 2, 3\}$.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei μ ein reguläres äußeres Maß auf X.

a) Seien $A, B \in \mathcal{P}(X)$ mit $A \cup B \in \mathcal{M}(\mu)$ und gelte $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) < \infty$. Zeigen Sie, dass $A, B \in \mathcal{M}(\mu)$ gilt.

b) Sei $\mu(X) < \infty$ und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Ist $C \subset Y$ $f(\mu)$-messbar, d. h. $C \in \mathcal{M}(f(\mu))$, so gilt $f^{-1}(C) \in \mathcal{M}(\mu)$.

Bitte werfen Sie Ihre gehefteten und mit Namen sowie Gruppennummer versehenen Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1.