Prof. Dr. V. Bangert 20.11.2014

Analysis III

WS 2014/15 — Blatt 5

Abgabe: Donnerstag, 27. November, vor Beginn der Vorlesung.

Konstruktion des Hausdorff-Maßes

Ist $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$, so definieren wir den Durchmesser $diam(A)$ der Menge A durch $diam(A) := \sup\{|x-y| \mid x, y \in A\} \in [0,\infty]$ und setzen $diam(\emptyset) := 0$. Für $\delta > 0$ sei

$$\mathcal{A}^\delta := \Big\{ A \;\Big|\; A \subset \mathbb{R}^n,\ diam(A) < \delta \Big\}$$

und für $s \in [0,\infty)$ seien die Mengenfunktionen $\lambda_{s,\delta} : \mathcal{A}^\delta \to [0,\infty]$ definiert durch

$$\lambda_{s,\delta}(A) := \begin{cases} diam(A)^s & \text{für } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{für } A = \emptyset \end{cases}$$

(dabei verwenden wir die Konvention $0^0 := 1$). Sei $\mu_{s,\delta}$ das nach Satz 3.7 durch $\lambda_{s,\delta}$ induzierte äußere Maß auf $\mathbb{R}^n$, d. h.

$$\mu_{s,\delta}(A) := \inf \Big\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_{s,\delta}(A_i) \;\Big|\; A \subset \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big),\ A_i \in \mathcal{A}^\delta \text{ für alle } i \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Aufgabe 1: **2 Punkte**

Zeigen Sie: Für jedes $s \geq 0$ und jedes $A \subset \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $(0,\infty) \ni \delta \mapsto \mu_{s,\delta}(A)$ monoton fallend.

Definition: Damit ist $\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta\searrow 0} \mu_{s,\delta}(A) \in [0,\infty]$ wohldefiniert und heißt das s-dimensionale Hausdorffmaß von A. In der Literatur ist dies noch mit einer hier unterschlagenen Normierungskonstante versehen.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei $s \in [0,\infty)$. Zeigen Sie

a) $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty],\ A \mapsto \mathcal{H}^s(A)$ ist ein äußeres Maß.

b) $\mathcal{H}^0$ ist das Zählmaß.

c) Ist $\delta > 0$ und $\infty > t > s$, so gilt für alle $A \subset \mathbb{R}^n$: $\mu_{t,\delta}(A) \leq \delta^{t-s}\mu_{s,\delta}(A)$.

d) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Dann gilt $\mathcal{H}^t(A) = 0$ für alle $\infty > t > s$.

Aufgabe 3: **2 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}$ mit $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ für alle $i \neq j$. Zeigen Sie, dass $\mu(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$ gilt.

Bitte wenden...

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ und für $k \in \mathbb{N}_0$ wie in Lemma 6.5 die Würfelfamilie $\mathcal{W}_k := \{Q_{m,k} := 2^{-k}(m + [0,1]^n) \,|\, m \in \mathbb{Z}^n\}$ sowie die Mengen

$$\mathcal{F}_k(E) := \Big\{Q \in \mathcal{W}_k \;\Big|\; Q \subset E\Big\}, \quad F_k(E) := \bigcup \Big\{Q \;\Big|\; Q \in \mathcal{F}_k(E)\Big\},$$
$$\mathcal{G}_0(E) := \mathcal{F}_0(E), \quad \mathcal{G}_k(E) := \Big\{Q \in \mathcal{F}_k(E) \;\Big|\; Q \not\subset F_{k-1}(E)\Big\} \quad (k \geq 1)$$

und $\mathcal{G}(E) := \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{G}_k(E)$ definiert.

a) Skizzieren Sie $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < \frac{25}{9}\} \subset \mathbb{R}^2$ und zeichnen Sie die in $\mathcal{G}_0(E)$ sowie $\mathcal{G}_1(E)$ enthaltenen Würfel ein.

b) Zeigen Sie: Sind $Q_1 \neq Q_2$ Elemente von $\mathcal{G}(E)$, so gilt $\lambda^n(Q_1 \cap Q_2) = 0$.

c) Zeigen Sie: Ist E offen im $\mathbb{R}^n$, so gilt $\lambda^n(E) = \sum_{Q \in \mathcal{G}(E)} vol^n(Q)$.

Tipp: Verwenden Sie die Aussage von Aufgabe 3.

Aufgabe 5 (Cantormenge): **3 Punkte**

Ist $T = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, so definieren wir $T' := [a, \frac{2a+b}{3}] \cup [\frac{a+2b}{3}, b]$, d. h. T' entsteht aus T durch Wegnahme des offenen mittleren Drittels $(\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3})$. Diese Operation kann auf Vereinigungen $S = S_1 \cup \cdots \cup S_n$ von endlich vielen disjunkten abgeschlossenen Intervallen S_i durch $S' := S_1' \cup \cdots \cup S_n'$ fortgesetzt werden.

Beginnend mit $T_0 := [0,1]$ definieren wir induktiv $T_1 := T_0' = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, $T_2 := T_1' = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$, ..., $T_{n+1} := T_n'$. Die Menge $\mathbb{D} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$ heißt *Cantorsches Diskontinuum* oder *Cantormenge.*

Zeigen Sie, dass $\mathbb{D}$ nichtleer und abgeschlossen ist sowie $\lambda^1(\mathbb{D}) = 0$ gilt. Zeigen Sie weiter, dass $\mathbb{D}$ kein Intervall I der Form $I = [a,b]$ mit $a < b$ enthält.

Bitte werfen Sie Ihre gehefteten und mit Namen sowie Gruppennummer versehenen Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1.