Analysis III

WS 2014/15 — Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, 4. Dezember, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit $dist(A, B) := \inf\{|x-y| \,|\, x \in A,\, y \in B\} > 0$. Zeigen Sie, dass für alle $0 \leq s < \infty$ die Identität $\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ gilt.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz mit Konstante L. Dann gilt für alle $A \subset \mathbb{R}^n$ und alle $s \in (0, \infty)$: $\mathcal{H}^s(F(A)) \leq L^s\, \mathcal{H}^s(A)$.

b) Sei $S_\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Streckung um den Faktor $\theta \in \mathbb{R}$, d. h. $S_\theta(x) := \theta\, x$, so gilt für alle $s \in (0, \infty)$ und alle $A \subset \mathbb{R}^n$: $\mathcal{H}^s(S_\theta(A)) = |\theta|^s\, \mathcal{H}^s(A)$.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $A \in \mathcal{M}(\lambda^n)$ und $f : A \to [0, \infty]$ sei $\mathcal{M}(\lambda^n)|_A$-messbar. Zeigen Sie: Es existiert eine Borelmenge $B \subset A$, so dass $\lambda^n(A \backslash B) = 0$ gilt und $f|_B$ Borelmessbar (d. h. $\mathcal{B}^n|_B$-messbar) ist.

Tipp: Verwenden Sie Satz 6.9 (bzw. Folgerung 4.11), um die Behauptung für λ^n-Treppenfunktionen f zu zeigen, und verwenden Sie dann Satz 7.2 und Satz 2.9.

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Es seien die Voraussetzungen von Satz 6.15 erfüllt. Sei weiter μ "Borelregulär", d. h. für jedes $E \subset \mathbb{R}^n$ existiert eine Borelmenge $B \supset E$ mit $\mu(E) = \mu(B)$. Zeigen Sie, dass dann $\mu(E) = \mu([0,1]^n)\, \lambda^n(E)$ für *alle* $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Aufgabe 5: **2 Punkte**

Zu $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ heißt $P(v_1, \ldots, v_n) := \{\sum_{i=1}^n t_i\, v_i \,|\, 0 \leq t_i \leq 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n\}$ das von $v_1, \ldots, v_n$ erzeugte Parallelotop.

a) Skizzieren Sie das von $v_1 = (1, 1)$ und $v_2 = (2, 3)$ erzeugte Parallelotop im $\mathbb{R}^2$.

b) Sei S die Matrix mit den Spaltenvektoren $v_1, \ldots, v_n$.
Zeigen Sie, dass $\lambda^n(P(v_1, \ldots, v_n)) = |\det S|$ gilt.

Bitte werfen Sie Ihre gehefteten und mit Namen sowie Gruppennummer versehenen Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1.