Analysis III

WS 2014/15 — Blatt 7

Abgabe: Donnerstag, 11. Dezember, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei μ ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$. Gelte für alle $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit $dist(A, B) > 0$ die Gleichheit $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $S \subset \mathbb{R}^n$ beliebig. Die Teilaufgaben a) bis d) zeigen $\mu(S) \geq \mu(S \setminus C) + \mu(S \cap C)$, d. h. C ist $\mu-$messbar.

a) Seien zu $k \in \mathbb{N}$ die Mengen $S_k := \{x \in S \,|\, \frac{1}{k+1} < dist(x, C) \leq \frac{1}{k}\}$ definiert. Zeigen Sie $\sum_{i=1}^N \mu(S_{2i}) = \mu(\bigcup_{i=1}^N S_{2i})$ sowie $\sum_{i=1}^N \mu(S_{2i-1}) = \mu(\bigcup_{i=1}^N S_{2i-1})$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

b) Seien zu $j \in \mathbb{N}$ die Mengen $C_j := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, dist(x, C) < \frac{1}{j}\}$ definiert. Zeigen Sie $\mu(S \setminus C_j) + \mu(S \cap C) \leq \mu(S)$ für $j \in \mathbb{N}$.

c) Zeigen Sie $\mu(S \setminus C) \leq \mu(S \setminus C_j) + \mu(\bigcup_{k=j}^\infty S_k)$ für $j \in \mathbb{N}$.

d) Gelte zusätzlich $\mu(S) < \infty$. Folgern Sie aus a): $\lim_{j\to\infty} \mu(\bigcup_{k=j}^\infty S_k) = 0$.

e) Zeigen Sie, dass alle Borelmengen μ-messbar sind.

Bemerkung: Aufgabe 1 und Aufgabe 1 von Blatt 6 zusammen zeigen, dass jede Borelmenge in $\mathbb{R}^n$ für jedes $s \in [0, \infty)$ $\mathcal{H}^s$-messbar ist.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

a) Zeigen Sie: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := \sin(x) \notin \mathcal{L}^*(\lambda^1)$.

b) Zeigen Sie: $f : [1, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2} \in \mathcal{L}^1(\lambda^1|_{[1,\infty)})$.

c) Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f \in \mathcal{L}^*(\lambda^1)$, aber $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda^1)$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0, \infty)$ $\mathcal{A}$-messbar mit $\int_X f \, d\mu < \infty$. Zeigen Sie: Für alle $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \delta$ gilt: $\int_A f \, d\mu < \epsilon$.

Tipp: Benutzen Sie eine Treppenfunktion s mit $0 \leq s \leq f$ und $\int_X f - s \, d\mu \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Definition: Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien f_n, f μ-messbare, μ-fast überall endliche Funktionen. Man sagt, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *im Maß gegen f konvergiert*, falls $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X \,|\, f_n(x) - f(x) \text{ ist definiert und } |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0$ für alle $\epsilon > 0$ gilt.

Aufgabe 4: **2 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $f_n, f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Zeigen Sie, dass aus $f_n \to f$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$, d. h. $\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$, schon $f_n \to f$ im Maß folgt.

Aufgabe 5: **2 Punkte**

Zeigen Sie, dass in Satz 8.2 (Levi, monotone Konvergenz) nicht auf die Voraussetzung $\int_X f_1 \, d\mu > -\infty$ verzichtet werden kann.

Bitte werfen Sie Ihre gehefteten und mit Namen sowie Gruppennummer versehenen Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1.