Prof. Dr. V. Bangert 11.12.2014

Analysis III

WS 2014/15 — Blatt 8

Abgabe: Donnerstag, 18. Dezember, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Zeigen Sie, dass $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{\sin(x)}{x}$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist, also $\lim_{S\to\infty} \int_1^S \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ existiert. Zeigen Sie weiter, dass $|f|$ nicht uneigentlich Riemann-integrierbar (und damit $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda^1|_{[1,\infty)})$) ist.

Tipp: Zeigen Sie mithilfe partieller Integration, dass $(\int_1^{S_n} \frac{\sin(x)}{x}\, dx)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle Folgen $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [1, \infty)$ mit $S_n \to \infty$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Verifizieren Sie mittels Differentiation unter dem Integral, dass

$$\int_0^1 s^t \ln(s)\, ds = \frac{-1}{(1+t)^2}$$

für $t > -1$ gilt. (Weisen Sie für jedes $\epsilon > 0$ die Voraussetzungen von Satz 8.11 für $U = (-1 + \epsilon, \infty)$ nach.)

Aufgabe 3: **4 Punkte**

a) Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ und $\omega_n := \lambda^n(B_1(0))$. Zeigen Sie: $\lambda^n(A) \leq \omega_n\, \mathcal{H}^n(A)$.

   Tipp: Ist $B \subset \mathbb{R}^n$, $x \in B$ und $R := diam(B) < \infty$, so gilt $B \subset \overline{B_R}(x)$, und damit $\lambda^n(B) \leq \omega_n\, (diam(B))^n$.

b) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}^n(U) \leq n^{\frac{n}{2}}\, \lambda^n(U)$ gilt.

   Tipp: Für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine Folge achsenparalleler Würfel $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ der Kantenlänge $\leq \epsilon$, so dass $U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$ und $\lambda^n(U) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda^n(Q_i)$ (siehe Blatt 5, Aufgabe 4, wobei wir die Konstruktion mit einem $k_0 \in \mathbb{N}$, welches $2^{-k_0} < \epsilon$ erfüllt, starten). Wie hängen der Durchmesser und die Kantenlänge von Q_i zusammen?

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Sei C die Cantormenge aus Blatt 5, Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass die Cantormenge überabzählbar und in sich dicht (d. h. jeder Punkt $x \in C$ ist Häufungspunkt von C) ist.

Tipp: Aus der Konstruktion der Cantormenge kann man die triadische Darstellung

$$C = \left\{ x \in [0,1] \;\middle|\; x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{3^k},\ c_k \in \{0,2\}\, \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

herleiten. Diese dürfen Sie ohne Beweis verwenden, eine Begründung finden Sie z. B. unter `http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_set#Cardinality`.

Bitte werfen Sie Ihre gehefteten und mit Namen sowie Gruppennummer versehenen Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1.