Analysis III

WS 2014/15 — Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, 8. Januar, vor Beginn der Vorlesung.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Geben Sie hinreichende und notwendige Bedingungen für $a, b \geq 0$ an, damit in der Young'schen Ungleichung Gleichheit, d. h. $ab = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, gilt.

b) Geben Sie hinreichende und notwendige Bedingungen für $f \in \mathcal{L}^p$ und $g \in \mathcal{L}^q$ mit $f, g \geq 0$ an, damit in der Hölder-Ungleichung Gleichheit, d. h. $\int_X fg \, d\mu = \|f\|_p \|g\|_q$, gilt.

Tipp: Gehen Sie die Beweise der Ungleichungen noch einmal durch.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei C die Cantormenge aus Blatt 5, Aufgabe 5. Sie können annehmen, dass es ein $s \geq 0$ gibt, so dass $0 < \mathcal{H}^s(C) < \infty$ gilt. Zeigen Sie, dass dann $s = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ gelten muss.

Tipp: Teilen Sie C in die Mengen $C_0 := \{x \in [0,1] \,|\, x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{3^k}, c_1 = 0, c_k \in \{0,2\}\}$ und $C_2 := \{x \in [0,1] \,|\, x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{3^k}, c_1 = 2, c_k \in \{0,2\}\}$ auf und skalieren diese um den Faktor 3.

Bemerkung: Definieren wir die Hausdorff-Dimension einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ durch $\dim_{\mathrm{H}}(A) := \inf\{s \in \mathbb{R} \,|\, \mathcal{H}^s(A) = 0\}$, so haben wir (unter der Annahme $0 < \mathcal{H}^s(C) < \infty$ für ein $s \geq 0$) mit Blatt 5, Aufgabe 2d) $\dim_{\mathrm{H}}(C) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ gezeigt.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

a) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $0 < \mu(X) < \infty$. Sei $1 \leq p < q \leq \infty$ und $f \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Zeigen Sie $\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$ für $q \neq \infty$ bzw. $\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}} \|f\|_\infty$ für $q = \infty$ (Dies bedeutet $\mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^p(\mu)$). **Tipp:** Verwenden Sie die Hölder-Ungleichung.

b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass für $X = [1, \infty)$, $\mu = \lambda^1|_{[1,\infty)}$ und $p > 1$ die Inklusion $L^p(\lambda^1|_{[1,\infty)}) \subset L^1(\lambda^1|_{[1,\infty)})$ nicht richtig ist.

Aufgabe 4: (Verallgemeinerung der majorisierte Konvergenz) **5 Punkte**

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ eine Maßraum. Seien f_n, f μ-messbar, so dass f_n fast überall gegen f konvergiert. Weiter gebe es Funktionen $h_n, h \in \mathcal{L}^1(\mu)$ derart, dass $|f_n| \leq h_n$ (fast überall) und $h_n \to h$ in $\mathcal{L}^1(\mu)$, d. h. $\int_X |h_n - h| \, d\mu \to 0$, gilt. Zeigen Sie, dass $\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$ und $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu$ für $n \to \infty$ gilt.

Tipp: Zeigen Sie zunächst die Behauptung für eine fast überall konvergente Teilfolge h_{n_j}. Schließen Sie wie im Beweis von Satz 8.6 unter Verwendung der Folge $(h_{n_j} + h) - |f_{n_j} - f|$ auf die Konvergenzen von f_{n_j}. Schließen Sie dann auf die gesamte Folge (Warum gilt f_n, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$?).

Bitte werfen Sie Ihre gehefteten und mit Namen sowie Gruppennummer versehenen Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1.