Analysis III

WS 2014/15 — Lösung zu Blatt 3, Aufgabe 1.

Aufgabe 1:

Wir ergänzen die Aufgabenstellung durch $\sum_{i\in I} a_i := 0$, falls $I = \emptyset$ (oder betrachten nur nichtleere Mengen I und E_j, $j \in J$).

Sei I eine beliebige Menge und $a : I \to [0,\infty]$ eine Abbildung, die jedem $i \in I$ ein $a_i \in [0,\infty]$ zuordnet. Man definiert $\sum_{i\in I} a_i \in [0,\infty]$ durch

$$\sum_{i\in I} a_i := \sup\Big\{ \sum_{i\in F} a_i \;\Big|\; F \subset I,\ F \text{ ist endliche Menge} \Big\}.$$

Zeigen Sie: Ist $(E_j)_{j\in J}$ eine disjunkte Zerlegung von I, d. h. es gilt $E_j \cap E_k = \emptyset$ für $j,k \in J$, $j \neq k$ sowie $\bigcup_{j\in J} E_j = I$, so folgt

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in E_j} a_i\Big).$$

Beweis: (i)
Wir zeigen $\sum\limits_{i\in I} a_i \leq \sum\limits_{j\in J}\Big(\sum\limits_{i\in E_j} a_i\Big)$. Sei dazu F eine beliebige endliche Teilmenge von I und, für $j \in J$, $F_j := F \cap E_j$. Wir benutzen die Behauptung für endliche Mengen und erhalten

$$\sum_{i\in F} a_i = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in F_j} a_i\Big). \tag{1}$$

Da F_j endlich ist, gilt nach Definition von $\sum\limits_{i\in E_j} a_i$: $\sum\limits_{i\in F_j} a_i \leq \sum\limits_{i\in E_j} a_i$.
Da $F_j \neq \emptyset$ nur für endlich viele $j \in J$ gilt, folgt daraus:

$$\sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in F_j} a_i\Big) \leq \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in E_j} a_i\Big). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $\sum\limits_{i\in F} a_i \leq \sum\limits_{j\in J}\Big(\sum\limits_{i\in E_j} a_i\Big)$. Da das für jede endliche Teilmenge F von I gilt, folgt $\sum\limits_{i\in I} a_i \leq \sum\limits_{j\in J}\Big(\sum\limits_{i\in E_j} a_i\Big)$.

(ii) Wir zeigen $\sum\limits_{j\in J}\Big(\sum\limits_{i\in E_j} a_i\Big) \leq \sum\limits_{i\in I} a_i$.

1. Fall: Es existiert ein $j \in J$ mit $\sum\limits_{i\in E_j} a_i = \infty$. Dann existiert für jede Zahl $C > 0$ eine endliche Teilmenge F von $E_j \subseteq I$ mit $\sum\limits_{i\in F} a_i \geq C$. Nach Definition von $\sum\limits_{i\in I} a_i$ folgt daraus auch $\sum\limits_{i\in I} a_i = \infty$.

2. Fall: Für alle $j \in J$ gilt $\sum\limits_{i \in E_j} a_i =: b_j < \infty$. Sei G eine beliebige, nichtleere, endliche Teilmenge von J. Mit $n \in \mathbb{N}$ sei die Anzahl der Elemente von G bezeichnet. Für jedes $\epsilon > 0$ und jedes $j \in G$ finden wir nach Definition von $b_j := \sum\limits_{i \in E_j} a_i$ eine endliche Teilmenge $F_j \subseteq E_j$, so dass

$$\sum_{i \in E_j} a_i \leq \sum_{i \in F_j} a_i + \frac{\epsilon}{n}$$

gilt. Dann ist $F = \bigcup\limits_{j \in G} F_j$ eine endliche Teilmenge von I.

Wir benutzen die Behauptung für endliche Mengen und erhalten

$$\sum_{i \in F} a_i = \sum_{j \in G} \sum_{i \in F_j} a_i,$$

also:

$$\sum_{j \in G} \left(\sum_{i \in E_j} a_i \right) \leq \sum_{j \in G} \left(\sum_{i \in F_j} a_i + \frac{\epsilon}{n} \right) = \sum_{i \in F} a_i + \epsilon \leq \sum_{i \in I} a_i + \epsilon.$$

Da das für jedes $\epsilon > 0$ und jede endliche Teilmenge G von J gilt, folgt durch Anwendung der Definition von $\sum\limits_{j \in J} b_j$:

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in E_j} a_i \right) \leq \sum_{i \in I} a_i.$$