Analysis III

WS 2014/15 — Bonusblatt

Abgabe: Donnerstag, 12. Februar, vor Beginn der Vorlesung.

Achtung: Dieses Übungsblatt kann nicht mehr in den Tutoraten besprochen werden. Die korrigierten Aufgaben können am 19. und 26. Februar zwischen 14:00 und 17:00 Uhr im Raum 144, Eckerstr. 1 abgeholt werden. Die Punkte werden als Bonuspunkte gewertet.

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$ eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit und $F(x) = Ax + a$ ($A \in \mathcal{O}(n+k)$, $a \in \mathbb{R}^{n+k}$) eine Isometrie des $\mathbb{R}^{n+k}$ mit $F(M) = M$. Zeigen Sie: Ist $f \in \mathcal{L}^*(\omega_M)$, so gilt $\int_M f \circ F \, d\omega_M = \int_M f \, d\omega_M$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Sei $\mathbb{S}^n$ die n-dimensionalen Einheitssphäre im $\mathbb{R}^{n+1}$ und $\omega_n := \omega_{\mathbb{S}^n}(\mathbb{S}^n)$. Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{S}^n} x_i^2 \, d\omega_{\mathbb{S}^n}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{\omega_n}{n+1} \qquad \text{für } i \in \{1, \dots, n+1\}.$$

Tipp: Verwenden Sie Aufgabe 1 und $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$ für $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R}^n \setminus B_1(0) \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|^{-\alpha}$ für $\alpha > n$ und $\omega_{n-1} := \omega_{\mathbb{S}^{n-1}}(\mathbb{S}^{n-1})$. Berechnen Sie

$$\frac{1}{w_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1(0)} f \, d\lambda^n.$$

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Wir betrachten $f_1 : (0, \pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{S}^2$, $(\theta, \omega) \mapsto (\sin\theta \cos\omega, \sin\theta \sin\omega, \cos\theta)^T$ und $f_2 : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$, $(x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)})^T$.

a) Skizzieren Sie $V_1 := f_1((0, \pi) \times (0, 2\pi))$ und $V_2 := f_2(B_1(0))$.

b) Wo sind $f_2^{-1} \circ f_1$ und $f_1^{-1} \circ f_2$ definiert? Berechnen Sie $f_2^{-1} \circ f_1$.

Bitte werfen Sie Ihre gehefteten und mit Namen sowie Gruppennummer versehenen Lösungen in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Kellergeschoss der Eckerstr. 1.