Prof. Dr. V. Bangert 12.02.2015

Analysis III

WS 2014/15

Zur Übereinstimmung von n-dimensionalem Hausdorffmaß $\mathcal{H}^n$ mit dem Volumen- (oder Oberflächen-) Maß ω_M von $n-$dimensionalen Untermannigfaltigkeiten eines $\mathbb{R}^{n+k}$.

Vorbemerkung zur Normierung von $\mathcal{H}^n$:

Ist V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $I : V \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie, so erhalten wir durch

$$\lambda_V^n(E) := \lambda^n(I(E))$$
$$\mathcal{H}^n(E) := \mathcal{H}^n(I(E))$$

äußere Maße λ_V^n, $\mathcal{H}^n$ auf V, die unabhängig von der Wahl der Isometrie I sind, und n-dimensionales Lebesguemaß bzw. n-dimensionales Hausdorffmaß auf V heißen. Es folgt aus Satz 6.15 (zusammen mit Blatt 7, Aufgabe 1), dass es eine Konstante $c_n > 0$ gibt, so dass

$$\lambda_V^n(E) = c_n\, \mathcal{H}^n(E)$$

für jede λ_V^n-messbare Teilmenge E von V gilt. Die Konstante c_n kann als $c_n = \lambda^n(B_1^n(0))$ bestimmt werden (das ist nichttrivial). Wir werden im Folgenden annehmen, dass $\mathcal{H}^n$ so normiert ist, dass

$$\lambda_V^n(E) = \mathcal{H}^n(E)$$

für jede Teilmenge E eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V gilt.

Satz: *Ist M n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+k}$ und ist $E \subset M$ Lebesgue-messbar, so gilt*

$$\mathcal{H}^n(E) = \omega_M(E).$$

Im Beweis wird – neben der vorangehenden Normierung – nur die Aussage von Aufgabe 2a) auf Blatt 6 verwendet: Ist $E \subset \mathbb{R}^{n+k}$ und $f : E \to \mathbb{R}^{n+k}$ Lipschitz mit Konstante L, so gilt

$$\mathcal{H}^n(f(E)) \le L^n\, \mathcal{H}^n(E). \tag{1}$$

Bemerkung: In der Aufgabe war vorausgesetzt, dass f auf dem ganzen $\mathbb{R}^{n+k}$ L-Lipschitz ist. Es ist leicht zu sehen, dass man sich bei den in der Definition von $\mathcal{H}^n(E)$ auftretenden Mengen auf Teilmengen von E beschränken kann. Deshalb genügt die Voraussetzung, dass $f : E \to \mathbb{R}^{n+k}$ L-Lipschitz (bezüglich des euklidischen Abstands) ist.

Beweisskizze: Wegen der σ-Kompaktheit von M (vergleiche Satz B bzw. Satz 13.12) genügt es, zu jedem $p \in M$ eine offene Menge $V \in \mathcal{O}_M$ mit $p \in V$ zu finden, so dass unsere Behauptung $\mathcal{H}^n(E) = \omega_M(E)$ für $E \subset V$ gilt. Da Untermannigfaltigkeiten lokal als Graphen darstellbar sind, können wir $M = graph(u)$ für eine C^1-Funktion $u : U \to \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, annehmen.

Zunächst betrachten wir den Fall, dass u eine lineare Funktion ist, d.h. $u =: \ell \in Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, so dass $M = graph(\ell) =: V \subset \mathbb{R}^{n+k}$ ein n-dimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}^{n+k}$ ist. Ist $I : V \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie (siehe Vorbemerkung), so stimmt $\mathcal{H}^n$ auf V mit λ^n_V überein. Benutzt man $I^{-1} : \mathbb{R}^n \to V = M$ als Parametrisierung, so folgt, dass $\lambda^n_V = \omega_M$ gilt, d.h. $\mathcal{H}^n|_{\mathfrak{m}(M)} = \omega_M$.

Ist $u \in C^1(U, \mathbb{R}^k)$ nicht linear und $z \in U$, so betrachten wir die Projektion P_z von $\mathbb{R}^{n+k}$ auf den Unterraum $graph(Du(z))$ (der parallel zum Tangentialraum an $graph(u)$ im Punkt $(z, u(z))$ ist) und zwar längs der Projektionsrichtung $\{0\} \times \mathbb{R}^k$, d.h.

$$P_z(x, y) := (x, Du(z)x) \qquad \text{für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^{n+k}.$$

Aus der C^1-Eigenschaft von u folgt nun, dass es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $B(z, \delta) \subset U$ gibt, so dass für alle $p, q \in graph(u|_{B(z,\delta)})$ gilt:

$$(1 - \epsilon)|P_z(p) - P_z(q)| \leq |p - q| \leq (1 + \epsilon)|P_z(p) - P_z(q)|. \tag{2}$$

Ist $F \subset B(z, \delta)$ und $E = graph(u|_F)$, so kann man (1) und (2) auf $P_z|_E \colon E \to F$ und auf $(P_z|_E)^{-1} : F \to E$ anwenden und erhält:

$$(1 - \epsilon)^n \, \mathcal{H}^n(F) \leq \mathcal{H}^n(E) \leq (1 + \epsilon)^n \, \mathcal{H}^n(F). \tag{3}$$

Verwendet man die Parametrisierung

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto (x, Du(z)x) \in graph(Du(z))$$

des Untervektorraums $graph(Du(z)) =: V \subset \mathbb{R}^{n+k}$, so folgt aus dem vorher behandelten linearen Fall und Beispiel (13.6):

$$\mathcal{H}^n(F) = \omega_V(F) = \sqrt{\det\Big(E_n + Du^T(z) \cdot Du(z)\Big)}\, \lambda^n(F). \tag{4}$$

Ist nun $E = graph(u|_F)$ eine beliebige Lebesguemessbare Teilmenge von $graph(u)$ und ist F in einer kompakten Teilmenge von U enthalten, so finden wir zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele Punkte $z_1, \ldots, z_N \in U$ und Radien $\delta_1, \ldots, \delta_N \in (0, \epsilon)$ mit

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(z_i, \delta_i) \subset U,$$

und so dass (2) auf jedem Ball $B(z_i, \delta_i)$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, gilt. Wir setzen $F_1 := F \cap B(z_1, \delta_1)$ und rekursiv

$$F_i := \Big(F \cap B(z_i, \delta_i)\Big) \setminus \bigcup_{j<i} F_j \qquad \text{und} \qquad E_i = graph(u|_{F_i}).$$

Dann bilden die $(F_i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ eine disjunkte Zerlegung von F und für jedes $i \in \{1,\dots,N\}$ gilt nach (3) und (4)

$$\begin{aligned}(1-\epsilon)^n &\sqrt{\det\Big(E_n + Du^T(z_i)\cdot Du(z_i)\Big)}\,\lambda^n(F_i)\\ &\leq \mathcal{H}^n(E_i) \leq (1+\epsilon)^n \sqrt{\det\Big(E_n + Du^T(z_i)\cdot Du(z_i)\Big)}\,\lambda^n(F_i).\end{aligned} \tag{5}$$

Wählt man nun eine Nullfolge $\epsilon_k > 0$ und entsprechende z_i^k, δ_i^k, F_i^k, $i \in \{1,\dots,N_k\}$, so konvergieren wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von Du auf F die Funktionen $\sum_{i=1}^{N_k}\sqrt{\det(E_n + Du^T(z_i^k)\cdot Du(z_i^k))}\,\chi_{F_i^k}$ gleichmäßig gegen $\sqrt{\det(E_n + Du^T\cdot Du)}\,\chi_F$, so dass aus (5) im Limes $k\to\infty$ die Behauptung folgt. □

Übungen dazu:

a) Man überlege sich, dass es genügt, den Fall $M = graph(u)$ zu betrachten.

b) Man beweise (2), ausgehend von der Definitionsgleichung für $Du(x)$:

$$u(y) - u(x) = Du(x)(y-x) + |y-x|\,r(x,y) \text{ mit } \lim_{y\to x} r(x,y) = 0.$$

Dabei sind die für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $\epsilon \in (0,1)$ gültigen Ungleichungen

$$a^2 + (b+\epsilon a)^2 \leq (1+2\epsilon)(a^2+b^2) \quad \text{und} \quad a^2 + (b-\epsilon a)^2 \geq (1-\epsilon)(a^2+b^2)$$

nützlich.

c) Man zeige, dass gleichmäßig

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{N_k}\sqrt{\det\Big(E_n + Du^T(z_i^k)\cdot Du(z_i^k)\Big)}\,\chi_{F_i^k} = \sqrt{\det\Big(E_n + Du^T\cdot Du\Big)}\,\chi_F$$

gilt.

d) Die Beweisskizze betrachtet nur den Fall, dass F in einer kompakten Teilmenge von U enthalten ist. Warum folgt daraus der allgemeine Fall?