Grundbegriffe der Topologie

V. Bangert

(zur Vorlesung Differentialgeometrie, WS 15/16)

Def. 0.1 Ein topologischer Raum ist eine Menge X zusammen mit einem System $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X, das folgende Eigenschaften hat

(a) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$ ($\emptyset$ = leere Menge)

(b) Ist $V_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I$, so gilt $\bigcup\limits_{i\in I} V_i \in \mathcal{O}$.

(c) Ist $V_1 \in \mathcal{O}$, $V_2 \in \mathcal{O}$, so gilt $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{O}$.

Bezeichnungen: $\mathcal{O}$ heißt eine Topologie auf X. Die Elemente von $\mathcal{O}$ heißen offene Mengen (bzgl. $\mathcal{O}$). Eine Menge $U \subseteq X$ heißt Umgebung von $x \in X$, falls eine offene Menge V existiert, so daß $x \in V \subset U$ gilt. $A \subset X$ heißt abgeschlossen, falls $X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$ offen ist.

Bsp.: Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\| x \| := (\sum x_i^2)^{\frac{1}{2}}$, und für $r > 0$ sei $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n | \; \| x - y \| < r\}$. Wir definieren eine Topologie $\mathcal{O}$ auf $\mathbb{R}^n$ (“die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^n$”) durch: $V \in \mathcal{O} \Leftrightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ und für alle $x \in V$ existiert $r > 0$ mit $B(x, r) \subseteq V$.

Def. 0.2 Es seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $f{:}X \to Y$. f heißt stetig, falls aus $V \in \mathcal{O}_Y$ folgt $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}_X$. f heißt Homöomorphismus, falls f bijektiv ist und falls f und f^{-1} stetig sind.

Bem.: Die Komposition (Hintereinanderausführung) stetiger Abbildungen ist stetig.

Def. 0.3 Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum und $A \subseteq X$.
Die Topologie $\mathcal{O}_A := \{W \subseteq A \mid \text{Es existiert } V \in \mathcal{O} \text{ mit } W = V \cap A\}$ heißt die von $\mathcal{O}_X$ auf A induzierte Topologie, $(A, \mathcal{O}_A)$ heißt Teilraum von $(X, \mathcal{O}_X)$.

Bsp.: $X = \mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie, $A = [0, \infty)$. Dann ist das “halboffene” Intervall $[0, 1)$ offen in A (d.h. $[0, 1) \in \mathcal{O}_A$), da $[0, 1) = (-\infty, 1) \cap A$ und $(-\infty, 1)$ offen in $X = \mathbb{R}$.

Bem.: Sei $f : X \to Y$ stetig, $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ und $f(A) \subseteq B$. Dann ist $f \mid A : A \to B$ stetig bzgl. $\mathcal{O}_A$ und $\mathcal{O}_B$.

Def. 0.4 Seien $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume. Die Produkttopologie $X \times Y$ von O_X und O_Y ist die Topologie auf $X \times Y$, die definiert ist durch:

$W \in O_{X \times Y} \Leftrightarrow W \subseteq X \times Y$ und für alle $(x, y) \in W$ existieren $U \in O_X, V \in O_Y$ mit $(x, y) \in U \times V \subseteq W$.

Bsp.: Die übliche Topologie auf $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist die Produkttopologie der üblichen Topologien auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$.

Def. 0.5 Sei $(X, \mathcal{O})$ topologischer Raum. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$ heißt Basis der Topologie $\mathcal{O}$, falls gilt: Für alle $V \in \mathcal{O}$ und alle $x \in V$ existiert $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B \subseteq V$.

Bsp.:

(a) $\mathcal{B} = \{B(x, r) \mid x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ ist Basis der üblichen Topologie des $\mathbb{R}^n$. (Man muß nur zeigen, daß die $B(x, r)$ offen sind; Dreiecksungleichung!)

(b) Der $\mathbb{R}^n$ besitzt sogar eine abzählbare Basis $\mathcal{B}' = \{B(x, r) | x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}$ und $r > 0\}$

(c) Also besitzt auch jeder Teilraum A eines $\mathbb{R}^n$ eine abzählbare Basis seiner Topologie.

(d) Die Produkttopologie (vgl. 0.4) ist dadurch definiert, daß die Menge $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_X, V \in \mathcal{O}_Y\}$ eine Basis der Produkttopologie ist.

Def. 0.6 Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt Hausdorffraum, falls für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt:
Es existieren $U \in \mathcal{O}$, $V \in \mathcal{O}$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Bsp.: Jeder Teilraum eines $\mathbb{R}^n$.

Bem.: Sind $f, g : X \to Y$ stetig und ist Y Hausdorffsch, so ist $A = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen.

Def. 0.7 Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt zusammenhängend, wenn X nicht in zwei disjunkte, offene, nichtleere Mengen zerlegt werden kann, d.h. falls aus $\emptyset \neq U \in \mathcal{O}$, $\emptyset \neq V \in \mathcal{O}$ und $U \cup V = X$ folgt $U \cap V \neq \emptyset$.

Bsp.:

a) Jedes Intervall in $\mathbb{R}$ (mit der induzierten Topologie) ist zusammenhängend.

b) Der $\mathbb{R}^n$ und jeder Ball $B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ sind zusammenhängend.

c) Ist $f : X \to Y$ stetig und X zusammenhängend, so ist $f(X) \subseteq Y$ zusammenhängend.

Bezeichnung: Sei $(X,\mathcal{O})$ topologischer Raum und $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ mit der induzierten Topologie.
Eine stetige Abbildung $c : [0,1] \to X$ heißt Weg in X (von $c(0)$ nach $c(1)$).

Def. Ein topologischer Raum $(X,\mathcal{O})$ heißt wegzusammenhängend, falls zu je zwei Punkten $x, y \in X$ ein Weg in X von x nach y existiert. $(X,\mathcal{O})$ heißt lokal wegzusammenhängend, falls jeder Punkt $x \in X$ eine (bzgl. der induzierten Topologie) wegzusammenhängende Umgebung besitzt.

Bem.: $(X,\mathcal{O})$ wegzusammenhängend $\Rightarrow$ $(X,\mathcal{O})$ zusammenhängend.

Bsp.: Der Teilraum $\left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\right\} \cup \{(0,y) \mid y \in [-1,1]\}$ von $\mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Satz. Ist $(X,\mathcal{O})$ zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend, so ist $(X,\mathcal{O})$ wegzusammenhängend.

Bew.: Die Relation ($x \sim y \Leftrightarrow$ es existiert ein Weg in X von x nach y) ist offenbar reflexiv, $x \sim x$ (konstanter Weg). Sie ist symmetrisch, denn ist c ein Weg von $c(0) = x$ nach $c(1) = y$, so ist $t \to c(1-t)$ ein Weg von y nach x. Schließlich ist $\sim$ transitiv; ist nämlich c_1 ein Weg von x nach y und c_2 ein Weg von y nach z, so ist

$$c(t) := \begin{cases} c_1(2t) & \text{für } \ 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ c_2(2t-1) & \text{für } \ \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

ein Weg von x nach z.

Die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $\sim$ heißen Wegzusammenhangskomponenten von X. "X lokal wegzusammenhängend" bedeutet gerade, daß die Wegzusammenhangskomponenten von X offen sind. Ist nun $x \in X$, so ist $U = \{y \in X \mid x \sim y\}$ und $V = \{y \in X \mid x \not\sim y\}$ eine Zerlegung von X in offene, disjunkte Mengen U und V und $U \neq \emptyset$. Da X zusammenhängend ist, folgt $V = \emptyset$, d.h. $X = U$. Das ist gerade die Behauptung.

Bezeichnung: Ein System $(U_i)_{i\in I}$ von offenen Mengen heißt offene Überdeckung von X, falls $\bigcup_{i\in I} U_i = X$.

Def. 0.9 Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von X eine endliche Teilüberdeckung von X besitzt, d.h. dass eine endliche Teilmenge $\{i_1, \dots, i_n\}$ der Indexmenge I existiert, so daß $X = \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$.

Bez.: Eine Teilmenge von X heißt kompakt, wenn sie mit der von X induzierten Topologie ein kompakter topologischer Raum ist.

Bsp.: (Bolzano-Weierstrass) Ein Teilraum $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt, genau dann wenn A (bzgl. der üblichen Topologie des $\mathbb{R}^n$) abgeschlossen und beschränkt ist.

Bem.:

a) Ist $f : X \to Y$ stetig und X kompakt, so ist $f(X)$ kompakt.

b) Ist $A \subseteq X$ kompakt und X Hausdorffsch, so ist A abgeschlossen.

   Bew. von b): Für alle $x \in X \setminus A$, $y \in A$ existieren offene Mengen $U_{x,y}$, $V_{x,y}$ mit $x \in U_{x,y}$, $y \in V_{x,y}$ und $U_{x,y} \cap V_{x,y} = \emptyset$. Für festes $x \in X \setminus A$ bildet $(V_{x,y})_{y\in A}$ eine offene Überdeckung von A. Sei $V_{x,y_1}, \dots, V_{x,y_n}$ eine endliche Teilüberdeckung von A und $U_x := \bigcap_{i=1}^{n} U_{x,y_i}$. Dann ist U_x offen, $x \in U_x$ und $U_x \cap A \subseteq U_x \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_{x,y_i} \right) = \emptyset$.

c) Ist $f : X \to Y$ stetig und bijektiv und ist X kompakt und Y Hausdorff, so ist f Homöomorphismus.

Def. 0.10 Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{O})$ heißt lokalkompakt, wenn für jedes $x \in X$ und für jede Umgebung U von X eine kompakte Umgebung V von x existiert mit $V \subseteq U$.

Satz: $(X, \mathcal{O})$ sei lokalkompakt mit abzählbarer Basis. Dann existiert eine Folge von kompakten Mengen $X_n \subseteq X$ mit $\ldots \subseteq X_{n-1} \subseteq \mathring{X}_n \subseteq X_n \subseteq$

$\mathring{X}_{n+1} \subseteq \ldots$ und $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n = X$. Dabei bezeichne

$$\mathring{X}_n = \bigcup\{U \mid U \in \mathcal{O} \text{ und } U \subseteq X_n\} \text{ den "offenen Kern" von } X_n.$$

Bew.: Sei $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Basis von $(X,\mathcal{O})$. Wir überlegen zunächst, daß jede offene Überdeckung $(V_i)_{i\in I}$ eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt: Für alle $n \in \mathbb{N}$, für die ein $i \in I$ mit $U_n \subseteq V_i$ existiert, wähle ein solches $i = i_n \in I$. Dann wird X von (V_{i_n}) überdeckt.

Da X lokalkompakt ist, existiert für alle $x \in X$ eine kompakte Umgebung V_x von X. Die $(\mathring{V}_x)_{x\in X}$ bilden also eine offene Überdeckung von X. Sei $(\mathring{V}_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Teilüberdeckung. Wir definieren X_n induktiv durch

$$\begin{aligned} X_1 &:= V_{x_1} \\ X_{n+1} &:= \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}, \end{aligned}$$

wobei m die kleinste natürliche Zahl $\geq n$ ist, für die $X_n \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} \mathring{V}_{x_i}$ gilt. Solch ein m existiert, da X_n kompakt und $(\mathring{V}_{x_k} \cap X_n)_{k\in\mathbb{N}}$ eine offene Überdeckung von X_n ist. X_{n+1} ist kompakt, da eine endliche Vereinigung kompakter Mengen kompakt ist.

Die Quotiententopologie

Ist X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, so bezeichne $[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$ die Äquivalenzklasse von $x \in X$, $X/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : X \to X/\sim$, $\pi(x) = [x]$, die kanonische Projektion.

Def. 0.11 Sei $(X,\mathcal{O})$ topologischer Raum und $\sim$ Äquivalenzrelation auf X. Die Quotiententopologie auf $X/\sim$ ist definiert durch:

$$U \subseteq X/\sim \ \text{ offen } \Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \in \mathcal{O}.$$

Bem.:

a) $\pi : X \to X/\sim$ ist stetig.

b) $f : X/\sim \to Y$ ist genau dann stetig, wenn $f \circ \pi : X \to Y$ stetig ist.

c) Ist $X/\sim$ Hausdorff, so sind alle Äquivalenzklassen $[x] \subseteq X$ abgeschlossen in X.

Bsp.: Sei $X = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit der üblichen Topologie ($\mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$) und der Äquivalenzrelation: $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : x = \lambda y$. $X/\sim$ mit der Quotiententopologie wird n-dimensionaler komplexer projektiver Raum genannt. $X/\sim =: \mathbb{C}\mathcal{P}^n$.

Eigenschaften:

1) $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\mathcal{P}^n$ ist offen, d.h. ist $U \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ offen, so ist $\pi(U) \subseteq \mathbb{C}\mathcal{P}^n$ offen. Speziell besitzt $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$ eine abzählbare Basis.

2) $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$ ist Hausdorff: Sei $\| \ \|$ eine hermitesche Norm auf $\mathbb{C}^{n+1}$. Seien $[x_1] \neq [x_2]$ verschiedene Punkte in $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$, o.E. $\| x_1 \| = 1 = \| x_2 \|$. Sei $\delta := \min\{\| x_1 - \lambda x_2 \| \mid \lambda \in S^1 \subseteq \mathbb{C}\} > 0$! Dann gilt für die offenen "Kegel" $C_i = \left\{\lambda z \mid z \in \mathbb{C}^{n+1}, \| z \| = 1, \| z - x_i \| < \frac{1}{2}\delta, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\right\}$:

$$\pi(C_1) \cap \pi(C_2) = \emptyset \text{ und } [x_i] \in \pi(C_i).$$

Die $\pi(C_i)$ sind nach 1) offen in $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$.

3) $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$ ist kompakt: Sei $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ die Einheitssphäre bzgl. einer Norm auf $\mathbb{C}^{n+1}$. Dann ist S^{2n+1} kompakt und $\pi(S^{n+1}) = \mathbb{C}\mathcal{P}^n$, so daß $\mathbb{C}\mathcal{P}^n$ wegen Bem. a) nach Def. 0.9 kompakt ist.