Übungsblatt 15 (Bonusblatt)
zur Vorlesung "Differentialgeometrie I", WS 15/16

Prof. V. Bangert **9. 2. 2016**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 16.2.16.*

Aufgabe 1. *(2 Zusatzpunkte)*
Sei $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ offen, $\tilde{f} \in C^1(\tilde{U}, \mathbb{R})$ und $U := \tilde{U} \cap M_L^m \neq \varnothing$, $f := \tilde{f}|_U$. Mit $\mathrm{grad} f$ sei der Gradient von f bzgl. der hyperbolischen Metrik g^L auf M_L^m bezeichnet.
Zeigen Sie: Für alle $x \in U$ gilt

$$\mathrm{grad} f(x) = (x, v(x)) \in T(M_L^m)_x \quad \text{mit}$$
$$v(x) = (\partial_1 \tilde{f}(x), ..., \partial_m \tilde{f}(x), -\partial_{m+1} \tilde{f}(x)) + \Big(\sum_{i=1}^{m+1} x_i \partial_i \tilde{f}(x)\Big) x.$$

Anleitung: Sie können etwa wie folgt argumentieren: $v(x) \in \mathbb{R}^{m+1}$ ist durch folgende zwei Bedingungen charakterisiert:

i) $\langle v(x), x \rangle^L = 0$ ($\iff$ $(x, v(x)) \in T(M_L^m)_x$).

ii) Für alle $w \in \mathbb{R}^{m+1}$ mit $\langle w, x \rangle^L = 0$ ($\iff$ $(x, w) \in T(M_L^m)_x$) gilt:

$$d\tilde{f}(x, w) = \langle v(x), w \rangle^L \ (\iff df(x, w) = g^L((x, v(x)), (x, w))).$$

Aufgabe 2. *(6 Zusatzpunkte)*
Ziel der Aufgabe ist zu zeigen, dass die Distanzfunktion d^L des Lorentzmodells (M_L^m, g^L) des hyperbolischen Raums durch

$$d^L(x, y) = \mathrm{arcosh}(-\langle x, y \rangle^L)$$

gegeben ist.

a) Überlegen Sie, dass es genügt,

$$d^L(x, e_{m+1}) = \mathrm{arcosh}(x_{m+1})$$

zu zeigen.

Hinweis: Für alle $y \in M_L^m$ existiert $A \in O^+(m+1, 1)$ (vgl. Blatt 10, Aufgabe 3) mit $Ay = e_{m+1}$.

bitte wenden!

b) Überlegen Sie, dass $f : M_L^m \to [0, \infty)$, $f(x) := \operatorname{arcosh}(x_{m+1})$, auf $M_L^m \backslash \{e_{m+1}\}$ C^∞ ist und zeigen Sie, dass für alle $x \in M_L^m \backslash \{e_{m+1}\}$

$$|\mathrm{grad} f(x)|^{g^L} = 1$$

gilt.

Sie können dazu Aufgabe 1 benutzen (mit $\tilde{U} = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_{m+1} > 1\}$ und $\tilde{f} : \tilde{U} \to (0, \infty)$, $\tilde{f}(x) = \operatorname{arcosh}(x_{m+1})$).

c) Verwenden Sie Aufgabe 4 von Blatt 11, um aus b) zu folgern, dass

$$d^L(x, e_{m+1}) = \operatorname{arcosh}(x_{m+1})$$

für alle $x \in M_L^m$ gilt.

Bem.: Alternativ kann man das mittels Aufgabe 4 von Blatt 14 einsehen oder mit Aufgabe 4 dieses Übungsblatts.

Aufgabe 3. *(4 Zusatzpunkte)*
Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $F : (0, \pi) \times S^{m-1} \to S^m \backslash \{e_{m+1}, -e_{m+1}\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$,

$$F(r, x) = ((\sin r)x, \cos r)$$

ist ein Diffeomorphismus.

b) Bezeichnen $g^{S^m}, g^{S^{m-1}}$ die üblichen Metriken auf S^m und S^{m-1}, so gilt

$$F^* g^{S^m} = dr^2 + \sin^2(r) g^{S^{m-1}}.$$

Anleitung: Zeigen Sie, dass für jedes $x \in S^{m-1}$ die Kurve $r \to F(r, x)$ nach Bogenlänge parametrisiert ist und dass sie für jedes $r \in (0, \pi)$ die "Kleinsphäre" $F(\{r\} \times S^{m-1}) \subset S^m$ orthogonal schneidet. Zeigen Sie weiter, dass für jedes $r \in (0, \pi)$ die Abbildung

$$F_r : S^{m-1} \to F_r(S^{m-1}) \subset S^m \ , \ F_r(x) = F(r, x)$$

eine Homothetie ist mit $F_r^* g^{S^m} = \sin^2(r) g^{S^{m-1}}$.

Aufgabe 4. *(4 Zusatzpunkte)*
Dies ist ein Analagon zu Aufgabe 3) für das Lorentzmodell (M_L^m, g^L) des hyperbolischen Raums.

a) Zeigen Sie, dass $F : (0, \infty) \times S^{m-1} \to M_L^m \backslash \{e_{m+1}\}$

$$F(r, x) := (\sinh(r)x, \cosh(r)),$$

ein Diffeomorphismus ist.

b) Zeigen Sie, dass

$$F^* g^L = dr^2 + (\sinh)^2(r) g^{S^{m-1}}$$

gilt.