Übungsblatt 1 zur Vorlesung "Differentialgeometrie I" im WS 15/16

Prof. V. Bangert **20. 10. 2015**

Bitte schreiben Sie Ihre Name auf Ihre Lösung. *Abgabe am 27. Oktober 2015 vor Beginn der Vorlesung.*

Aufgabe 1. Für $m \in \mathbb{N}$ seien $\varphi_N : \mathbb{S}^m \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^m$ und $\varphi_S : \mathbb{S}^m \backslash \{S\} \to \mathbb{R}^m$ die stereographischen Projektionen und $\mathcal{A} = \{\varphi_N, \varphi_S\}$ der in der Vorlesung betrachtete C^∞-Atlas auf $\mathbb{S}^m$. Sei $U := \{x \in \mathbb{S}^m \mid x_{m+1} < 0\}$ und $\varphi : U \to \{y \in \mathbb{R}^m \mid |y| < 1\}$ definiert durch

$$\varphi(x_1, ...x_m, x_{m+1}) = (x_1, ..., x_m).$$

Berechnen Sie $\varphi \circ \varphi_S^{-1}$ (Definitionsbereich?) und zeigen Sie, dass $\varphi \circ \varphi_S^{-1}$ ein Diffeomorphismus (zwischen welchen offenen Mengen?) ist.

Aufgabe 2. Sei $X = (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \cup \{(0,1), (0,-1)\}$ und $\pi : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\pi(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \\ 0 & \text{falls } x \in \{(0,1), (0,-1)\}. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) Das Mengensystem $\mathcal{O}_X = \{V \subset X \mid \pi(V) \text{ ist offen in } \mathbb{R} \text{ (bzgl. der üblichen Topologie)}\}$ ist eine Topologie auf X.

b) $(X, \mathcal{O}_X)$ ist kein Hausdorffraum.

c) Sei $U_+ = (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \cup \{(0,1)\}$, $U_- = (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \cup \{(0,-1)\}$ und $\varphi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}$ definiert durch $\varphi_\pm = \pi|_{U_\pm}$. Dann ist $\mathcal{A} := \{\varphi_+, \varphi_-\}$ ein C^∞-Atlas auf $(X, \mathcal{O}_X)$.

Aufgabe 3. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, und für $x \in X$ sei

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$$

die Äquivalenzklasse von x. Sei $(A, \mathcal{O}_A)$ Teilraum von $(X, \mathcal{O}_X)$ und für alle $x \in X$ gelte $A \cap [x] \neq \varnothing$. Mit $\sim_A$ sei die Einschränkung von $\sim$ auf A bezeichnet, und für $x \in A$ sein $[x]_A = x \cap A$ die Äquivalenzklasse von x bzgl. $\sim_A$.

Zeigen Sie: Die Abbildung $j : A/\sim_A \to X/\sim_X$, $j([x]_A) = [x]$ ist stetig und bijektiv. Sie ist ein Homöomorphismus, falls es eine stetige Abbildung $r : X \to A$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_A$ gibt, für die gilt

$$x, y \in X \text{ und } x \sim y \Rightarrow r(x) \sim r(y).$$

Wenden Sie diese Aussage auf $A := \mathbb{S}^{2n+1} \subset X := \mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ und die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ mit den Äquivalenzklassen $[x] = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}\}$ an.

Aufgabe 4. Für $m \in \mathbb{N}$ betrachte auf $\mathbb{R}^{m+1} \backslash \{0\}$ die Äquivalenzrelation $\sim$ mit den Äquivalenzklassen

$$[x] = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\} \qquad (\text{ für } x \in \mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}).$$

Versieht man $\mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\}$ mit der üblichen Topologie, so heißt der topologische Raum

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^m := (\mathbb{R}^{m+1}\backslash\{0\})/\sim$$

der m-dimensionale reelle projektive Raum.

Zeigen Sie: $\mathbb{R}\mathrm{P}^m$ ist kompakter Hausdorffraum.