Übungsblatt 10 zur Vorlesung "Differentialgeometrie I", WS 15/16

Prof. V. Bangert **22. 12. 2015**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 12.1.16 vor der Vorlesung.*

Aufgabe 1.

a) Sei $M = \mathbb{R}^m$ mit der euklidischen Metrik $g = g^{\langle \cdot, \cdot \rangle}$, d.h. $g((x,v),(x,w)) = \sum_{i=1}^m v_i w_i$ für alle $(x,v),(x,w) \in T(\mathbb{R}^m)_x$. Zeigen Sie, dass der Gradient grad f bezüglich g von $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ durch
$$\operatorname{grad} f = (\partial_1 f, \partial_2 f, \ldots, \partial_m f)$$
gegeben ist.

b) Sei $N \subset \mathbb{R}^m$ Untermannigfaltigkeit, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ und $\tilde{f} := f|_N$. Dann gilt für den Gradienten grad $\tilde{f}$ von $\tilde{f}$ bezüglich der von g auf N induzierten Riemannschen Metrik: Für alle $x \in N$ ist grad $\tilde{f}(x)$ die Orthogonalprojektion von grad $f(x)$ auf TN_x.

Aufgabe 2.
Sei (M, g) pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $f : M \to \{0, 1, ..., \dim M\}$
$$f(p) := \operatorname{ind}(g_p)$$
ist lokal konstant.

b) Ist M zusammenhängend, so ist $\operatorname{ind}(g_p)$ unabhängig von p.

Aufgabe 3.
Betrachten Sie $\mathbb{R}^{m+1}$ mit der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle^L$ gegeben durch $\langle x, y \rangle^L = \sum_{i=1}^m x_i y_i - x_{m+1} y_{m+1}$. Bezeichne mit $O^+(m+1, 1) \subset GL(m+1, \mathbb{R})$ die Menge der Matrizen $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le m+1}$, für die gilt $A^* \langle \cdot, \cdot \rangle^L = \langle \cdot, \cdot \rangle^L$ und $a_{m+1,m+1} > 0$. Sei weiterhin
$$M_L := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_{m+1} > 0, \langle x, x \rangle^L = -1\}$$
und $i : M_L \to \mathbb{R}^{m+1}$ die Inklusionsabbildung. Zeigen Sie:

a) Ist $v \in \mathbb{R}^{m+1}$ und $\langle v, v \rangle^L < 0$, so ist $\langle \cdot, \cdot \rangle^L$ eingeschränkt auf die Hyperebene $v^\perp := \{w \in \mathbb{R}^{m+1} \mid \langle v, w \rangle^L = 0\}$ positiv definit. Folgern Sie daraus, dass $(M_L, g^L := i^* g^{\langle \cdot, \cdot \rangle^L})$ eine m-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

Bitte wenden!

b) Für alle $A \in O^+(m+1,1)$ gilt $A(M_L) = M_L$ und $A|_{M_L}$ ist eine Isometrie von (M_L, g^L) auf sich.

c) Zu je zwei Punkten $p, q \in M_L$ und Orthonormalbasen (bzgl. g^L) $v_1, \ldots, v_m \in (TM_L)_p$ und $w_1, \ldots, w_m \in (TM_L)_q$ existiert genau ein $A \in O^+(m+1,1)$ mit $A(p) = q$ und $A_*(v_i) = w_i$ für $1 \leq i \leq m$.

Aufgabe 4.

Betrachten Sie das Poincarémodell (B^m, g^P) und das obere Halbraummodell (H^m, g^H) des hyperbolischen Raumes.

Zeigen Sie, dass "die Inversion des $\mathbb{R}^m$ mit Pol $p = -e_m$", gegeben durch die Formel

$$F(x) = p + \frac{2(x-p)}{|x-p|^2}, \quad \left(\text{d.h. } F(x) = -e_m + \frac{2(x+e_m)}{|x+e_m|^2}\right)$$

eine Isometrie von (B^m, g^P) auf (H^m, g^H) ist.