Übungsblatt 11 zur Vorlesung "Differentialgeometrie I", WS 15/16

Prof. V. Bangert **12. 1. 2016**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 19.1.16 vor der Vorlesung.*

Aufgabe 1.
Für $i = 1, 2$ seien (M_i, g_i) zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $M = M_1 \times M_2$, $g = \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2$, deren Produkt. Zeigen Sie:

a) Sind $\gamma_i : [0,1] \to M_i$ stetig und stückweise C^1 mit $|\dot{\gamma}_i| = \text{const.}$, so gilt für $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2) : [0,1] \to M$:

$$L^g(\gamma) = \sqrt{L^{g_1}(\gamma_1)^2 + L^{g_2}(\gamma_2)^2}.$$

Für alle $(p_1, p_2), (q_1, q_2) \in M$ gilt

$$d^g((p_1, p_2), (q_1, q_2)) = \sqrt{d^{g_1}(p_1, q_1)^2 + d^{g_2}(p_2, q_2)^2}.$$

Hinweis: Sie können o.B. benutzen, dass man sich bei der Definition des Abstands auf reguläre C^1-Kurven beschränken kann.

b) Sind $\varphi_i \in \mathcal{F}_{M_i}$ Karten und $A_i \subset U^{\varphi_i}$ messbar, so gilt

$$\mathrm{vol}^g(A_1 \times A_2) = \mathrm{vol}^{g_1}(A_1) \cdot \mathrm{vol}^{g_2}(A_2).$$

Aufgabe 2.
Eine stetige, stückweise C^1-Kurve $c : [a,b] \to M$ in einer zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit heißt Kürzeste (von $c(a)$ nach $c(b)$), falls $L(c) = d(c(a), c(b))$ gilt. Zeigen Sie:

a) Ist $c : [a,b] \to M$ Kürzeste und $[\tilde{a}, \tilde{b}] \subset [a,b]$, so ist $c|_{[\tilde{a},\tilde{b}]}$ Kürzeste.

b) Sind p_0, p_1 Punkte im euklidischen Raum $\mathbb{R}^m$, so ist $c : [0,1] \to \mathbb{R}^m$, $c(t) := (1-t)p_0 + tp_1$, Kürzeste. Jede Kürzeste von p_0 nach p_1 ist Umparametrisierung von c.

Anleitung: Zerlegen Sie für eine beliebige Kurve γ von p_0 nach p_1 die Ableitung $\dot{\gamma}(t)$ in ihre Anteile parallel und orthogonal zu $p_1 - p_0$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3. *(5 Punkte)*
Es seien p_0 und $p_1 := p_0 + Te_{m+1}$ Punkte im Lorentzraum $(\mathbb{R}^{m+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle^L)$ und $T > 0$. Setze

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^+(p_0, p_1) := \{\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^{m+1} \mid \gamma(0) = p_0, \gamma(1) = p_1, \gamma \text{ stetig und stückweise } C^1, \\ \langle \dot\gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle^L < 0 \text{ und } \langle \dot\gamma(t), e_{m+1}\rangle^L < 0 \text{ falls } t \in [0,1] \text{ und } \dot\gamma(t) \text{ existiert. } \}\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie die Lorentzlänge $L(c)$ der Kurve $c \in \mathcal{C}^+(p_0, p_1)$, die durch $c_0(t) = p_0 + tTe_{m+1}$ definiert ist.

b) Zeigen Sie: Für die Lorentzlänge $L(\gamma)$ jeder Kurve $\gamma \in \mathcal{C}^+(p_0, p_1)$ gilt $L(\gamma) \leq L(c)$.

c) Zeigen Sie, dass $\inf\{L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}^+(p_0, p_1)\} = 0$ gilt.

Physikalische Interpretation: $\mathcal{C}^+(p_0, p_1)$ *besteht aus allen physikalisch möglichen Bewegungen eines Massenpunkts in der Raumzeit* $(\mathbb{R}^{m+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle^L)$ *von* p_0 *nach* p_1*. Für* $\gamma \in \mathcal{C}^+(p_0, p_1)$ *ist* $L(\gamma)$ *die bei der Bewegung längs* γ *verstreichende Eigenzeit des Massenpunkts. Um von* p_0 *nach* p_1 *zu kommen, verbraucht man also höchstens die Eigenzeit* $L(c)$*, schafft das aber bei anderen Bewegungen auch mit beliebig kleiner Eigenzeit.*

Aufgabe 4. *(3 Punkte)*
Sei $\bar\nabla$ der Standardzusammenhang auf $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Christoffelsymbole ${}^{\psi}\Gamma_{ij}^k$ (wo $1 \leq i, j, k \leq 3$) von $\bar\nabla$ in Kugelkoordinaten (d.h. bzgl. der Karte $\psi = F^{-1}$ aus Aufgabe 2, Blatt 9).