Übungsblatt 12 zur Vorlesung "Differentialgeometrie I", WS 15/16

Prof. V. Bangert **19. 1. 2016**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 26.1.16 vor der Vorlesung.*

Aufgabe 1.
Sei ∇ linearer Zusammenhang auf TM und $T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ durch

$$T(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

definiert. Zeigen Sie, dass T ein $(1, 2)$-Tensorfeld definiert (genannt Torsionstensor von ∇).

Hinweis: Lemma 6.9.

Aufgabe 2.
Sei (D, g) das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene, d.h.

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}, \quad g_z = \left(\frac{2}{1 - |z|^2}\right)^2 g_z^{\text{eukl.}}.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $w \in D$ die Abbildung

$$\varphi_w(z) = \frac{z - w}{1 - \bar{w}z}$$

eine Isometrie von (D, g) auf sich mit $\varphi_w(w) = 0$ ist.

Hinweis: $\varphi_{-w} \circ \varphi_w = \mathrm{id}_D$.

b) Das Schwarz-Lemma besagt, dass für jede holomorphe Funktion $f : D \to D$ mit $f(0) = 0$ gilt: $|f'(0)| \leq 1$.

Zeigen Sie, dass daraus folgt:

Ist $f : D \to D$ holomorph, so gilt für alle $z, w \in D$:

$$d^g(f(z), f(w)) \leq d^g(z, w).$$

Anleitung: Zeigen Sie, dass für alle $(w, v) \in TD$

$$|f_*(w, v)|^g \leq |(w, v)|^g$$

gilt, indem Sie diese Aussage mittels der Isometrien aus a) auf den Fall $w = 0 = f(w)$ *zurückführen.*

Bitte wenden!

Aufgabe 3.
Sind $v, w \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig, so heißt

$$\Gamma := \{mv + nw \mid (m,n) \in \mathbb{Z}^2\} \subset \mathbb{R}^2$$

das von v und w erzeugte Gitter. Γ operiert durch Translationen auf dem $\mathbb{R}^2$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2/\Gamma$ diffeomorph zu $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ist.

   Anleitung: Die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $Lv = e_1, Lw = e_2$, induziert einen Diffeomorphismus.

b) Nach Blatt 9, Aufgabe 4, existiert genau eine Riemannsche Metrik g_Γ auf $\mathbb{R}^2/\Gamma$, so dass $(\pi_\Gamma)^*(g_\Gamma)$ die euklidische Standardmetrik auf $\mathbb{R}^2$ ist (, wobei $\pi_\Gamma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\Gamma$ die kanonische Projektion bezeichne).

   Zeigen Sie: Das 2-dim. Riemannsche Volumen (= die Fläche) von $(\mathbb{R}^2/\Gamma, g_\Gamma)$ ist gleich der (üblichen) Fläche des von v und w aufgespannten Parallelogramms in $\mathbb{R}^2$.

c) Es sei Γ das von $v = (2, 4/3)$, $w = (2/3, 0)$ erzeugte Gitter. Sind $(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2, g_{\mathbb{Z}^2})$ und $(\mathbb{R}^2/\Gamma, g_\Gamma)$ isometrisch?

Aufgabe 4.
Seien (M, g) und $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $F : M \to \tilde{M}$ eine Isometrie. Mit ∇, $\tilde{\nabla}$ seien die Levi-Civita-Zusammenhänge von g, $\tilde{g}$ bezeichnet.

Zeigen Sie:

Sind $\tilde{X}$, $\tilde{Y} \in \Gamma(T\tilde{M})$ F-verwandt zu X, $Y \in \Gamma(TM)$ (d.h. es gilt $F_* \circ X \circ F^{-1} = \tilde{X}$ und $F_* \circ Y \circ F^{-1} = \tilde{Y}$), so ist $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ F-verwandt zu $\nabla_X Y$.

Folgern Sie daraus, dass das Bild eines parallelen Vektorfeldes V entlang einer glatten Kurve γ auf M unter F_* ein paralleles Vektorfeld entlang $F \circ \gamma$ auf $\tilde{M}$ ist.