Übungsblatt 14 zur Vorlesung "Differentialgeometrie I", WS 15/16

Prof. V. Bangert **2. 2. 2016**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 9.2.16 vor der Vorlesung.*

Aufgabe 1.
Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c \in \mathbb{R}_{>0}$.
Zeigen Sie, dass für die Riemannsche Metrik $\tilde{g} := c^2 g$ auf M gilt:

a) Der Levi-Cività-Zusammenhang von $\tilde{g}$ stimmt mit dem von g überein.

b) Für die Krümmungstensoren $\tilde{R}$ von $\tilde{g}$ und R von g gilt $\tilde{R} = R$, d.h. für alle $p \in M$, $u, v, w \in TM_p$ gilt

$$\tilde{R}(u, v)w = R(u, v)w.$$

Für die Schnittkrümmung $\tilde{K}$ von $\tilde{g}$ und K von g gilt

$$\tilde{K} = \frac{1}{c^2} K,$$

d.h. $\tilde{K}(E) = \dfrac{1}{c^2} K(E)$, für alle E in $G_2 M$.

Aufgabe 2.
Seien (M, g) und $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Ein $F \in C^\infty(M, \tilde{M})$ heißt Homothetie von (M, g) auf $(\tilde{M}, \tilde{g})$, falls $F : M \to \tilde{M}$ ein Diffeomorphismus ist und $F^* \tilde{g} = c^2 g$ für ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt.

a) Es existiere eine Homothetie $F : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$. Wie hängt die Schnittkrümmung $\tilde{K}$ von $(\tilde{M}, \tilde{g})$ mit der Schnittkrümmung K von (M, g) zusammen?
(Hinweis: Sie können Aufgabe 1 b) benutzen.)

b) Zeigen Sie: Ein Diffeomorphismus $F : M \to \tilde{M}$ ist genau dann Homothetie von (M, g) auf $(\tilde{M}, \tilde{g})$, wenn es ein $c \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, so dass für alle stückweise C^1-Kurven $\gamma : [a, b] \to M$ gilt:

$$L^{\tilde{g}}(F \circ \gamma) = c L^g(\gamma).$$

c) Für $c \in \mathbb{R}_{>0}$ sei $S_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die Streckung $S_c(x) = cx$. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ Untermannigfaltigkeit und $\tilde{M} := S_c(M)$. Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und g bzw. $\tilde{g}$ seien die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf M bzw. $\tilde{M}$ induzierten Riemannschen Metriken. Dann ist $S_c|_M : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ Homothetie.

Bitte wenden!

Aufgabe 3.
Sei (M,g) pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Dann heißt der Tensor $\nabla^2 f \in \Gamma(T^0_2 M)$, der für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$ durch

$$\nabla^2 f(X,Y) := g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y)$$

definiert ist, die Hesseform von f.

a) Zeigen Sie, dass $\nabla^2 f$ symmetrisch ist, d.h. dass für alle $X, Y \in \Gamma(TM)$ gilt:

$$\nabla^2 f(X,Y) = \nabla^2 f(Y,X).$$

b) Berechnen Sie $\nabla^2 f$ in lokalen Koordinaten und zeigen Sie, dass $\nabla^2 f$ im Fall ($M = \mathbb{R}^m$, $g =$ euklidische Metrik) mit der üblichen 2. Ableitung übereinstimmt.

c) Ist $\gamma : (a,b) \to M$ C^2-Kurve, so gilt

$$(f \circ \gamma)'' = \nabla^2 f(\dot\gamma, \dot\gamma) + g((\operatorname{grad} f) \circ \gamma, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot\gamma).$$

Aufgabe 4.
Sei (M^m_L, g^L) das Lorentzmodell des m-dimensionalen hyperbolischen Raums und $(x,v) \in TM^m_L$ mit $\langle v, v\rangle^L = 1$, d.h. (x,v) ist ein Einheitstangentialvektor an M^m_L. Dann ist

$$c_{(x,v)} : \mathbb{R} \to M^m_L,\ \ c_{(x,v)}(s) = \cosh(s)x + \sinh(s)v$$

die Geodätische in (M^m_L, g^L) mit $\dot c_{(x,v)}(0) = (x,v)$.

Anleitung: Argumentieren Sie in Analogie zum Fall der Sphäre im euklidischen Raum.