Übungsblatt 2 zur Vorlesung "Differentialgeometrie I" im WS 15/16

Prof. V. Bangert **27. 10. 2015**

Bitte schreiben Sie Ihre Name auf Ihre Lösung. *Abgabe am 3.11.15 vor der Vorlesung.*

Aufgabe 1. (2 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, und es existiere eine C^1-Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass für alle $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = g(r).$$

Finden Sie eine Bedingung, die notwendig und hinreichend für die stetige Differenzierbarkeit von f ist.

Aufgabe 2.
Seien M, N C^∞-Mannigfaltigkeiten mit differenzierbaren Strukturen $\mathcal{F}_M$ und $\mathcal{F}_N$, und sei $h : M \to N$ stetig. Für jedes $p \in M$ mögen Karten $\varphi \in \mathcal{F}_M$, $\psi \in \mathcal{F}_N$ mit $p \in U^\varphi$ und $h(p) \in U^\psi$ existieren, so dass $\psi \circ h \circ \varphi^{-1}$ (auf seinem Definitionsbereich $\varphi(U^\varphi \cap h^{-1}(U^\psi))$) C^∞ ist. Dann ist $h \in C^\infty(M, N)$.

Aufgabe 3.
Zeigen Sie:

a) Auf $M = \mathbb{R}$ mit der üblichen Topologie definiert $\tilde{\mathcal{A}} := \{\varphi\}$ mit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x^3$, einen 1-dimensionalen C^∞-Atlas.

b) Die von $\tilde{\mathcal{A}}$ erzeugte differenzierbare Struktur $\mathcal{F}(\tilde{\mathcal{A}})$ auf $\mathbb{R}$ ist verschieden von der üblichen differenzierbaren Struktur $\mathcal{F}$ auf $\mathbb{R}$ (, die vom Atlas $\mathcal{A} = \{\mathrm{id}_\mathbb{R}\}$ erzeugt wird).

c) $\varphi : (\mathbb{R}, \mathcal{F}(\tilde{\mathcal{A}})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{F})$ ist C^∞-Diffeomorphismus.

Aufgabe 4. (2 Punkte)
Sei $M \neq \varnothing$ ein topologischer Raum und $\mathcal{A}$ ein m-dimensionaler C^0-Atlas auf M (d.h. Bedingungen (a) und (b) aus Def. (1.1) sind erfüllt). Ist $\mathcal{A}$ abzählbar, so besitzt M eine abzählbare Basis.

Bitte wenden!

Aufgabe 5.
Sei $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ die kanonische Projektion. Zeigen Sie:

(a) Auf $U_j := \{[(z_0, ..., z_n)] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \mid z_j \neq 0\} \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ist die Abbildung

$$S_j : U_j \to \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\},\ S_j([z]) = \left(\frac{z_0}{z_j}, ..., \frac{z_{j-1}}{z_j}, 1, \frac{z_{j+1}}{z_j}, ..., \frac{z_n}{z_j} \right)$$

C^∞ und $\pi \circ S_j = \mathrm{id}_{U_j}$.
Bemerkung: S_j stimmt bis auf die 1 in der j-ten Komponente mit der Karte $\varphi_j : U_j \to \mathbb{C}^n$ überein.

(b) Gegeben seien eine C^∞-Mannigfaltigkeit N und Abbildungen $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to N$ und $\tilde{f} : \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \to N$, so dass $f \circ \pi = \tilde{f}$. Dann ist $\tilde{f} \in C^\infty(\mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}, N)$ genau dann wenn $f \in C^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^n, N)$.

(c) Ein homogenes Polynom P auf $\mathbb{C}^{n+1}$ vom Grad k ist eine Abbildung $\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ der Form

$$P(z_0, ..., z_n) := \sum_{i_1 + ... + i_n = k} a_{i_0 \dots i_n} z_0^{i_0} \cdots z_n^{i_n}\ .$$

Seien nun $P_0, ..., P_m$ homogene Polynome auf $\mathbb{C}^{n+1}$ vom Grad k, so dass $P_0^{-1}(0) \cap ... \cap P_m^{-1}(0) = \{0\}$ gilt (diese Forderung impliziert $m \geq n$, vgl. Krulls Hauptidealsatz). Zeigen Sie, dass durch

$$f([z]) := [(P_0(z), ..., P_m(z))]$$

eine C^∞-Abbildung $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^m$ definiert wird. (Prüfen Sie auch nach, dass f wohldefiniert ist.)