Übungsblatt 3 zur Vorlesung “Differentialgeometrie I” im WS 15/16

Prof. V. Bangert **3. 11. 2015**

Bitte schreiben Sie Ihre Name auf Ihre Lösung. *Abgabe am 10.11.15 vor der Vorlesung.*

Aufgabe 1. *Graßmannmannigfaltigkeiten*
Sei $G(n,k)$ die Menge aller k-dimensionalen Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$. Für eine beliebige Unterraumzerlegung $X \oplus Y = \mathbb{R}^n$ mit $\dim X = k$ und $\dim Y = n-k$ sei

$$U^Y := \{W \in G(n,k) \mid W \cap Y = \{0\}\}.$$

Jedes $W \in U^Y$ lässt sich eindeutig darstellen als Graph einer linearen Abbildung $L_{X,Y}(W) \in \mathrm{Hom}(X,Y) \cong \mathbb{R}^{k(n-k)}$, d.h.

$$W = \{x + L_{X,Y}(W)(x) \mid x \in X\} \subset X \oplus Y = \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

a) Auf $G(n,k)$ existiert genau eine Topologie, so dass die U^Y offen sind und die

$$L_{X,Y}(W) : U^Y \to \mathrm{Hom}(X,Y) \cong \mathbb{R}^{k(n-k)}$$

Homöomorphismen sind. Diese hat eine abzählbare Basis und ist Haussdorff'sch.

b) Der Atlas $\mathcal{A} := \{L_{X,Y} \mid X \oplus Y = \mathbb{R}^n\}$ macht $G(n,k)$ zu einer $k(n-k)$-dimensionalen C^∞-Mannigfaltigkeit.

Bemerkung: $G(n,1)$ ist diffeomorph zu $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$.

Aufgabe 2.
Ist $\varnothing \neq U \subset \mathbb{R}^m$ offen, so besitzt U eine natürliche differenzierbare Struktur, die durch den Atlas $\{\mathrm{id}_U\}$ induziert wird. Wir schreiben dann kurz:

$$\partial_i|_p := \partial_i^{\mathrm{id}_U}|_p$$

und identifizieren TU mit $U \times \mathbb{R}^m$, indem wir $\sum_{i=1}^m v^i \partial_i|_p$ auf $(p, v^1, ..., v^m)$ abbilden. Ist $m = 1$, so verzichten wir auch auf den Index und schreiben $\partial|_t$ für $\partial_1|_t$.
Rechnen Sie nach, dass mit diesen Identifikationen für alle glatten Kurven $c : (a,b) \to U$ und alle glatten Abbildungen $f : U \to \mathbb{R}^n$ gilt:

a) $\dot{c}(t) = (c(t), c'(t))$.

b) $f_*(p,v) = (f(p), Df(p)v)$.

c) $f_*\partial_i|_p = \sum_{j=1}^n D_i f^j(p) \partial_j|_{f(p)}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3.
Sei M m-dim. C^∞-Mannigfaltigkeit und $c : (a, b) \to M$ glatte Kurve in M.
Zeigen Sie:

a) Für alle $t \in (a, b)$ gilt $\dot{c}(t) = c_*(\partial|_t)$ (zur Def. von $\partial|_t$ vgl. Aufgabe 2).

b) Sei $\varphi : (\tilde{a}, \tilde{b}) \to (a, b)$ glatt und $\tilde{c} : (\tilde{a}, \tilde{b}) \to M$ sei durch $\tilde{c} = c \circ \varphi$ definiert. Dann gilt für alle $t \in (\tilde{a}, \tilde{b})$:
$$\dot{\tilde{c}}(t) = \varphi'(t) \cdot \dot{c}(\varphi(t)).$$

c) Ist $t_0 \in \mathbb{R}$ und $\tilde{c} : (a - t_0, b - t_0) \to M$ durch $\tilde{c}(t) = c(t + t_0)$ definiert, so gilt für alle $t \in (a - t_0, b - t_0)$
$$\dot{\tilde{c}}(t) = \dot{c}(t + t_0).$$

Aufgabe 4.
Sei M m-dim. C^∞-Mannigfaltigkeit mit differenzierbarer Struktur $\mathcal{F}$ und
$$G := \{(\varphi, x, a) \mid \varphi \in \mathcal{F}, x \in V^\varphi, a \in \mathbb{R}^m\} \text{ (wobei } \varphi : U^\varphi \to V^\varphi \subset \mathbb{R}^m).$$
Auf G definieren wir eine Relation $\sim$ durch
$$(\varphi, x, a) \sim (\psi, y, b) :\Leftrightarrow \varphi^{-1}(x) = \psi^{-1}(y) \text{ und } \mathrm{D}(\psi \circ \varphi^{-1})_x(a) = b$$
(wobei $\mathrm{D}(\psi \circ \varphi^{-1})_x$ die übliche Ableitung von $\psi \circ \varphi^{-1}$ an der Stelle $x \in V^\varphi$ bezeichnet, d.h. mit $F = \psi \circ \varphi^{-1}$ gilt: $b^i = \sum_{j=1}^m \partial_j F^i(x) a^j$).
Zeigen Sie:

a) $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.

b) Die Abbildung $j : G \to TM$, $j(\varphi, x, a) := \sum_{j=1}^m a^i \partial_i^\varphi|_{\varphi^{-1}(x)}$, induziert eine Bijektion $i : G/\sim\, \to TM$.

c) Ist $(\varphi, x, a) \in G$ und $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ durch $c(t) = \varphi^{-1}(x + ta)$ definiert, so gilt
$$j((\varphi, x, a)) = \dot{c}(0).$$