Übungsblatt 4 zur Vorlesung “Differentialgeometrie I” im WS 15/16

Prof. V. Bangert **10. 11. 2015**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 17.11.15 vor der Vorlesung.*

Aufgabe 1. *Clifford Torus*
Zeigen Sie:

a) Die Teilmenge $T = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}, |z_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}\}$ von

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

ist eine 2-dimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit von S^3.
Anleitung: $T = f^{-1}(0)$, wobei $f : S^3 \to \mathbb{R}$ durch $f(z_1, z_2) = |z_1|^2 - \frac{1}{2}$ definiert ist.

b) $h : \mathbb{R}^2 \to S^3$, $h(t_1, t_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2})$, ist eine Immersion mit $h(\mathbb{R}^2) = T$. Es gilt

$$h(t_1, t_2) = h(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) \Leftrightarrow (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) - (t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

Aufgabe 2. *Veronese Einbettung*
Sei $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ und $h : S^2 \to \mathbb{R}^4$ durch

$$h(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$$

definiert. Zeigen Sie:

a) $h \in C^\infty(S^2, \mathbb{R}^4)$ und h ist Immersion.

b) $h(x, y, z) = h(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \Leftrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \pm(x, y, z)$.

Aufgabe 3.

a) Die Funktion “Rang” $\mathrm{rg} : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ ist unterhalbstetig, d.h. für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid \mathrm{rg}(A) > \alpha\}$$

offen in $\mathbb{R}^{m\times n} (\cong \mathbb{R}^{mn})$.

Hinweis: Sie können benützen, dass es für $l = \mathrm{rg}(A)$ eine $(l \times l)$-Untermatrix B von A gibt, für die $\det B \neq 0$ gilt.

b) Sind M, N C^∞-Mannigfaltigkeiten und ist $h \in C^\infty(M, N)$, so ist die Menge der regulären Punkte von h offen in M (sie kann die leere Menge sein, z.B. falls $\dim M < \dim N$). Ebenso ist die Menge der Punkte $p \in M$, für die h_{*p} injektiv ist, eine offene Teilmenge von M.

Bitte wenden!

Aufgabe 4.
Sei M eine m-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit, $\mathcal{A}$ ein Atlas auf M und $\pi : TM \to M$ das Tangentialbündel von M. Bezeichne

$$\mathcal{A}_* := \{\phi_* : \pi^{-1}(U^\phi) \subset TM \to V^\phi \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{2m} \mid \phi \in \mathcal{A}\}.$$

Zeigen Sie:

a) Es gibt genau eine Topologie auf TM, so dass die Mengen $\pi^{-1}(U^\phi)$ für alle $\phi \in \mathcal{A}$ offen und die Abbildungen ϕ_* für alle $\phi \in \mathcal{A}$ homöomorph sind. Diese Topologie ist Hausdorff'sch und besitzt eine abzählbare Basis.

b) $\mathcal{A}_*$ ist ein $(2m)$-dimensionaler C^∞-Atlas auf TM.

c) $\pi : TM \to M$ ist eine Submersion.

d) Ist N eine C^∞-Mannigfaltigkeit und $h \in C^\infty(M, N)$, dann ist $h_* \in C^\infty(TM, TN)$.