Übungsblatt 5 zur Vorlesung "Differentialgeometrie I" im WS 15/16

Prof. V. Bangert **17. 11. 2015**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 24.11.15 vor der Vorlesung.*

Aufgabe 1.
Sei (X, ρ) ein metrischer Raum und

$$\mathrm{Iso}(X,\rho) := \{h : X \to X \mid h(X) = X \text{ und für alle } x, y \in X \text{ gilt } \rho(h(x), h(y)) = \rho(x, y)\}$$

seine Isometriegruppe. Für die Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{Iso}(X, \rho)$ gelte:
Für alle $x \in X$ ist

$$\delta(x) := \inf\{\rho(x, h(x)) \mid h \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}_X\}\} > 0.$$

Zeigen Sie: Γ operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf X (d.h. die Bedingungen (a) und (b) aus Def. (4.1) sind erfüllt).
Hinweis: Sehen Sie sich den Beweis dafür an, dass $\mathbb{Z}^m$ durch Translationen frei und eigentlich diskontinuierlich auf $\mathbb{R}^m$ operiert.

Aufgabe 2. *Rotationstorus*
Sei $R > r > 0$. Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$g(u, v) = ((R + r\cos 2\pi u)\cos 2\pi v, (R + r\cos 2\pi u)\sin 2\pi v, r\sin 2\pi u)$$

ist eine Immersion und

$$g(\mathbb{R}^2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 = r^2\}.$$

Skizzieren Sie $g(\mathbb{R}^2)$ zusammen mit den Kurven $u \to g(u, 0)$ und $v \to g(0, v)$.

b) Es existiert eine Abbildung $f : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f \circ \pi = g$ (wobei $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ die kanonische Projektion bezeichnet). f ist Einbettung.

Bitte wenden!

Aufgabe 3.
Sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform, und sei

$$O(b) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid \forall x, y \in \mathbb{R}^n \colon b(Ax, Ay) = b(x, y)\}.$$

Zeigen Sie:

a) $O(b)$ ist eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation.

b) $O(b)$ ist eine Untermannigfaltigkeit von $GL(n, \mathbb{R})$.
Betrachten Sie dazu die Abbildung $h : GL(n, R) \to \mathrm{Symm}(n, \mathbb{R})$, $h(A) := A^T BA$, wobei B die Matrix von b ist ($b(x, y) = x^T By$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$), und zeigen Sie, dass B ein regulärer Wert von h ist.

Hinweis: Zeigen Sie: Ist $S \in \mathrm{Symm}(n, \mathbb{R})$ und $A \in O(b)$, so ist $\mathrm{D}h(A)V = S$ für $V = \frac{1}{2}AB^{-1}S$.

Geben Sie die Dimension von $O(b)$ an.

c) Bestimmen Sie den Tangentialraum $T(O(b))_E$.

Hinweis: Erinnern Sie sich an die entsprechenden Überlegungen zu $O(n)$ in der Vorlesung.

Aufgabe 4. *Möbiusband*
Sei $M := \mathbb{R} \times (-1, 1)$ und M/Γ mit

$$\Gamma := \{h \in \mathrm{Diff}(M) \mid \exists n \in \mathbb{Z}\ \forall (x, y) \in M : h(x, y) = (x + n, (-1)^n y)\}$$

das Möbiusband. Für $(x, y) \in M$ sei $a(x) := (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, 0)$, $b(x) := \cos(\pi x) \cdot a(x) + \sin(\pi x) \cdot e_3$ und $g(x, y) := a(x) + y \cdot b(x) \in \mathbb{R}^3$.

a) Zeigen Sie:
Es gibt eine Abbildung $f : M/\Gamma \to \mathbb{R}^3$, so dass $f \circ \pi = g$. Diese Abbildung f ist eine Einbettung.

b) Skizzieren Sie das Bild $f(M/\Gamma)$.