Übungsblatt 6 zur Vorlesung "Differentialgeometrie I" im WS 15/16

Prof. V. Bangert **24. 11. 2015**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 1.12.15 vor der Vorlesung.*

Aufgabe 1.
Seien M, N C^∞-Mannigfaltigkeiten und $\pi_M : M \times N \to M$, $\pi_N : M \times N \to N$ die üblichen Projektionen. Für $(p,q) \in M \times N$ betrachte den Vektorraumhomomorphismus

$$i_{p,q} : T(M \times N)_{(p,q)} \to TM_p \times TN_q, \ i_{p,q}(v) = ((\pi_M)_* v, (\pi_N)_* v).$$

Zeigen Sie

a) Ist $c : (a,b) \to M \times N$ C^∞-Kurve, $t \in (a,b)$ und $c(t) = (p,q)$ und ist $c_M = \pi_M \circ c$, $c_N = \pi_N \circ c$, d.h. $c = (c_M, c_N)$, so gilt

$$i_{p,q}(\dot{c}(t)) = (\dot{c}_M(t), \dot{c}_N(t)).$$

b) $i_{p,q}$ ist Vektorraumisomorphismus.

Bemerkung: Meist identifiziert man $T(M \times N)_{(p,q)}$ mit $TM_p \times TN_q$ mittels $i_{p,q}$.

Aufgabe 2. *Beweisen Sie Fakt (4.7):*
Eine Mannigfaltigkeit M, $\dim M \geq 1$, ist genau dann orientierbar, wenn es einen Atlas $\mathcal{A}$ von M gibt, so dass alle Kartenwechsel positive Jacobideterminante haben.

Aufgabe 3.
Sei M^m C^∞-Mannigfaltigkeit, $m \geq 1$, φ Karte von M und $\tilde{\varphi} : U^\varphi \to \mathbb{R}^m$ definiert durch $\tilde{\varphi} = (\varphi^1, ..., \varphi^{m-1}, -\varphi^m)$, d.h. $\tilde{\varphi} = S \circ \varphi$, wobei $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ die Spiegelung an $\mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ bezeichnet. Speziell ist $\tilde{\varphi}$ ebenfalls Karte von M mit $U^{\tilde{\varphi}} = U^\varphi$. Zeigen Sie:

a) Für alle $p \in U^\varphi$ sind die Basen $(\partial_1^\varphi|_p, ..., \partial_m^\varphi|_p)$ und $(\partial_1^{\tilde{\varphi}}|_p, ..., \partial_m^{\tilde{\varphi}}|_p)$ von TM_p nicht gleich orientiert.

b) M besitze einen Atlas $\mathcal{A} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ mit nur 2 Karten, so dass $U^{\varphi_1} \cap U^{\varphi_2}$ eine zusammenhängende Teilmenge von M ist. Dann ist M orientierbar.

Bitte wenden!

Aufgabe 4.
Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Eine C^∞-Abbildung $V : M \to T\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $\pi \circ V = \mathrm{id}_M$, heißt *normales Vektorfeld auf* M, falls für jeden Punkt $p \in M$ gilt: $V(p) \in (TM_p)^\perp := \{(p,v) \in T\mathbb{R}^n_p \mid \forall\ (p,w) \in TM_p :\ \langle v,w\rangle = 0\}$.
Sei nun M Urbild eines regulären Wertes, d.h. es existiere eine glatte Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ und ein regulärer Wert $y \in \mathbb{R}^k$ von f, so dass $M = f^{-1}(y)$.
Zeigen Sie:

a) Es existieren k normale Vektorfelder $V_1, \ldots, V_k$ auf M, so dass an jedem Punkt $p \in M$ die Vektoren $V_1(p), \ldots, V_k(p)$ das orthogonale Komplement $(TM_p)^\perp$ von TM_p aufspannen.

   Hinweis: Betrachten Sie die Komponentenfunktionen von f und deren Gradienten.

b) M ist orientierbar.

   Hinweis: Für eine Basis $w_1, ..., w_{n-k}$ von TM_p können Sie definieren:
   $(w_1, ..., w_{n-k})$ heißt genau dann positiv orientiert, wenn $(V_1(p), ..., V_k(p), w_1, ..., w_{n-k})$ positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^n$ ist.