Übungsblatt 7 zur Vorlesung “Differentialgeometrie I” im WS 15/16

Prof. V. Bangert **1. 12. 2015**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 8.12.15 vor der Vorlesung.*

Aufgabe 1. *Orientierungsüberlagerung.*
Sei $m \geq 1$ und M eine zusammenhängende m-dimensionale C^∞-Mannigfaltigkeit. Betrachten Sie $\overline{M} := \big\{(p,\sigma) \bigm| p \in M,\ \sigma \in \mathcal{O}(TM_p)\big\}$ und die Projektion $\pi\colon \overline{M} \to M$ mit $\pi(p,\sigma) := p$. Zeigen Sie:

a) Es existiert genau eine C^∞-Mannigfaltigkeits-Struktur auf $\overline{M}$, so dass für jede Karte φ von M die Menge $\overline{U}^\varphi$ offen und die Abbildung $\pi|_{\overline{U}^\varphi}$ ein Diffeomorphismus ist, wobei

$$\overline{U}^\varphi := \big\{(p,\sigma) \bigm| p \in U^\varphi,\ \sigma = [(\partial_1^\varphi|_p, \dots, \partial_m^\varphi|_p)]\,\big\} \subset \overline{M}.$$

b) Die Abbildung $F\colon \overline{M} \to \overline{M}$ mit $(p,\sigma) \mapsto (p,\overline{\sigma})$, wobei $\overline{\sigma}$ die zu σ entgegengesetzte Orientierung ist, ist ein Diffeomorphismus. $\overline{M}$ ist orientierbar und M ist diffeomorph zu $\overline{M}/\{F, \mathrm{id}_{\overline{M}}\}$.

c) M ist genau dann nicht orientierbar, wenn $\overline{M}$ zusammenhängend ist.

Aufgabe 2.
Sei $\Phi\colon M \times \mathbb{R} \to M$ von der Klasse C^∞, und es gelte $\Phi_0 = \mathrm{id}_M$ und $\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{s+t}$ für alle $s,t \in \mathbb{R}$, wobei $\Phi_t(p) := \Phi(p,t)$. Zeigen Sie: Es existiert genau ein Vektorfeld $X \in \Gamma(TM)$, dessen Fluss gerade Φ ist (d.h. so dass $\Phi = \Phi^X$ gilt).

Aufgabe 3.
Betrachten Sie $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ mit der Projektion $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\Phi : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$ der lineare Fluss mit Richtungsvektor $(1,a)$, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\Phi_t(\pi(x)) = \pi(x + t(1,a)).$$

Zeigen Sie:

a) Ist $a \in \mathbb{Q}$, so sind alle Flusslinien von Φ periodisch.

b) Ist $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so sind alle Flusslinien injektiv und dicht in $\mathbb{T}^2$.

Hinweis: Zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ sei $m_n \in \mathbb{Z}$ die größte ganze Zahl $\leq na$, d.h. $na - m_n \in [0,1)$. Die Folge $(na - m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat einen Häufungspunkt in $[0,1]$. Benutzen Sie dies, um zunächst zu zeigen, dass die Folge $\Phi_n(\pi(x))$ dicht liegt auf dem Kreis $\pi(x + \{0\} \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{T}^2$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4.
Zu $v \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ sei $X \in \Gamma(T\mathbb{R}^m)$ durch $X(x) = (x, v)$ definiert und $Y \in \Gamma(T\mathbb{R}^m)$ durch $Y(x) = (x, x)$.

a) Berechnen Sie die Flüsse Φ^X und Φ^Y von X und Y.

b) Zeigen Sie, dass für alle $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ mit $s \cdot t \neq 0$ und alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$(\Phi_s^X \circ \Phi_t^Y)(x) \neq (\Phi_t^Y \circ \Phi_s^X)(x).$$