Übungsblatt 8 zur Vorlesung "Differentialgeometrie I" im WS 15/16

Prof. V. Bangert **8. 12. 2015**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 15.12.15 vor der Vorlesung.*

Aufgabe 1.
Sei $X \in \Gamma(T\mathbb{R}^m)$ Vektorfeld auf dem $\mathbb{R}^m$, $X(p) = (p, V(p))$. Es mögen Konstanten $C > 0$, $R > 0$ existieren, so dass für alle $p \in \mathbb{R}^m$ mit $|p| \geq R$ gilt:

$$|V(p)| \leq C|p| \ .$$

Zeigen Sie: X ist vollständig.

Anleitung: Betrachten Sie eine Integralkurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^m \backslash B(0, R)$ von X und $r(t) := |c(t)|$. Zeigen Sie, dass

$$r(b) \leq r(a) e^{C(b-a)}$$

gilt. Dann können Sie Satz (5.3) (c) verwenden.

Aufgabe 2.
Betrachten Sie auf dem $\mathbb{R}^4$ die Vektorfelder Y_1, Y_2, Y_3, die für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ durch $Y_j(x) = (x, V_j(x))$ mit

$$\begin{aligned} V_1(x) &= (-x_2, x_1, x_4, -x_3) \\ V_2(x) &= (-x_3, -x_4, x_1, x_2) \\ V_3(x) &= (-x_4, x_3, -x_2, x_1) \end{aligned}$$

gegeben sind.

a) Berechnen Sie $[Y_j, Y_k]$ für $1 \leq j < k \leq 3$.

b) Sei $i : S^3 \to \mathbb{R}^4$ die Inklusionsabbildung. Zeigen Sie, dass es für $1 \leq j \leq 3$ Vektorfelder $X_j \in \Gamma(TS^3)$ gibt, so dass Y_j i-verwandt zu X_j ist (d.h. $i_* \circ X_j = Y_j \circ i$). Berechnen Sie $[X_j, X_k]$ für $1 \leq j < k \leq 3$.

   Hinweis: Sie können Satz (5.11) (e) verwenden.

Bemerkung (für Leute mit Kenntnissen über Quaternionen): Es gilt $V_1(x) = xi$, $V_2(x) = xj$, $V_3(x) = xk$ (, wobei $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ mit $x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k$ identifiziert wird).

Bitte wenden!

Aufgabe 3.
Auf $\mathbb{R}^2$ seien die Vektorfelder $X(p) = (p, V(p))$ und $Y(p) = (p, W(p))$ gegeben durch $V(x, y) = (y, -\sin x)$ und $W(x, y) = (y, \sin x)$. Kommutieren die zugehörigen Flüsse Φ^X und Φ^Y?

Aufgabe 4.
Seien $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TM)$ und in jedem Punkt $q \in M$ seien $Y_1(q)$ und $Y_2(q)$ linear unabhängig. Am Punkt $p \in M$ gelte

$$[Y_1, Y_2](p) \notin \operatorname{span}\{Y_1(p), Y_2(p)\}.$$

Zeigen Sie: Es existiert keine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit N von M mit $p \in N$, so dass für alle $q \in N$ gilt:

$$TN_q = \operatorname{span}\{Y_1(q), Y_2(q)\}.$$

Anleitung: Nehmen Sie an, solch ein N existiere, und betrachten Sie die Inklusion $i : N \to M$ und die Vektorfelder $X_1 := Y_1 \circ i$, $X_2 := Y_2 \circ i$ auf N. Sie können dann Satz (5.11) (e) verwenden.