Übungsblatt 9 zur Vorlesung "Differentialgeometrie I" im WS 15/16

Prof. V. Bangert **15. 12. 2015**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 22.12.15 vor der Vorlesung.*

Aufgabe 1.
Ist V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, so bezeichne $L_s(V)$ den Vektorraum aller multilinearen Abbildungen

$$A\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s\text{-mal}} \to V$$

(also $\mathrm{End}(V) = L_1(V)$).
Zeigen Sie: Durch

$$\Phi(A)(\pi, v_1, \ldots, v_s) := \pi(A(v_1, \ldots, v_s)) \text{ für } v_1, \ldots, v_s \in V,\ \pi \in V^*$$

wird eine lineare Abbildung $\Phi : L_s(V) \to T^1_s(V)$ definiert. Φ ist ein Vektorraumisomorphismus.

Aufgabe 2. *Die euklidische Metrik in Kugelkoordinaten.*
Sei g^{eukl} die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^3$, d.h. $g^{\mathrm{eukl}}_x((x,v),(x,w)) = \sum_{i=1}^3 v_i w_i$ für $x \in \mathbb{R}^3$, $(x,v),(x,w) \in T\mathbb{R}^3_x$. Sei $F : V = (0,\infty) \times (0,2\pi) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$F(r,\varphi,\theta) = r(\sin\varphi \sin\theta, \cos\varphi \sin\theta, \cos\theta), \quad \text{für } (r,\varphi,\theta) \in V.$$

Die Abbildung $F^{-1} : F(V) \to V$ ist eine Karte des $\mathbb{R}^3$.

a) Berechnen Sie die Koeffizienten der Metrik $F^* g^{\mathrm{eukl}}$ auf V (d.h. die "euklidische Metrik in Polarkoordinaten").

b) Berechnen Sie die Länge der Kurve $c : (0,2\pi) \to V$, $c(t) = (r_0, t, \theta_0)$ bezüglich $F^* g^{\mathrm{eukl}}$ (in Abhängigkeit von $r_0 > 0$, $\theta_0 \in (0,\pi)$). Warum stimmt das Ergebnis mit der euklidischen Länge der Kurve $F \circ c$ überein?

Bitte wenden!

Aufgabe 3.

a) Zeigen Sie: Ist $h \in C^\infty(M, N)$ Immersion und g Riemannsche Metrik auf N, so ist h^*g Riemannsche Metrik auf M.

b) Sei $\langle v, w\rangle^L := \sum_{i=1}^{m-1} v_i w_i - v_m w_m$ das Lorentzprodukt auf $\mathbb{R}^m$. Finden Sie einen $(m-1)$-dimensionalen Untervektorraum V des $\mathbb{R}^m$, so dass $\langle \cdot, \cdot \rangle^L$ restringiert auf $V \times V$ eine ausgeartete Bilinearform ist.

Aufgabe 4.

a) Sei (M, g) pseudoriemannsche Mannigfaltigkeit und $\Gamma \subset \mathrm{Diff}(M)$ Untergruppe der Diffeomorphismengruppe von M, die frei und eigentlich diskontinuierlich auf M operiert. Bezeichne $\pi : M \to M/\Gamma$ die Projektion. Zeigen Sie:

   Es existiert genau dann eine pseudoriemannsche Metrik $\bar{g}$ auf M/Γ mit $\pi^*\bar{g} = g$, wenn alle $h \in \Gamma$ Isometrien von (M, g) sind.

b) Wenden Sie a) auf den Fall des Torus $T^m = \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ und des projektiven Raums $\mathbb{R}P^m = S^m/\{\pm \mathrm{id}_{S^m}\}$ an. Verwenden Sie auf $\mathbb{R}^m$ die euklidische Metrik und auf S^m die von der Inklusion in den euklidischen $\mathbb{R}^{m+1}$ induzierte Metrik.