# 3. Übungsblatt zur Vorlesung „Mehrfachintegrale “ im Wintersemester 2015–2016 bei Prof. Dr. S. Goette

---

*Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihre Lösung.*
*Abgabe: Freitag, den 29.01.2016 bis 10:30 Uhr in den gelben Metallkästen, Eckerstr. 1, UG.*

**Aufgabe 1:**
Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt des Quaders

$$K = [1,2] \times [0,\pi/2] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$$

mit der Dichte $\rho(x,y,z) = y\sin(xy)$ für alle $(x,y,z) \in K$ (*siehe Bemerkung 2.8*).

**Aufgabe 2:**
Es sei $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)}{(x+y)^3} & \text{falls } (x,y) \in (0,1] \times (0,1], \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und berechnen Sie diese:

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx.$$

(b) Ist $f$ Riemann-integrierbar über $[0,1]^2$?

(c) Ist $f$ uneigentlich Riemann-integrierbar über $[0,1]^2$?

Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 3:**

(a) Bestimmen Sie das Volumen des dreidimensionalen Festkörpers, der durch das elliptische Paraboloid $x^2 + 2y^2 + z = 16$, die Ebenen $x = 2$ und $y = 2$, und die drei Koordinatenebenen begrenzt wird.

(b) Bestimmen und skizzieren Sie je einen dreidimensionalen Festkörper, dessen Volumen gegeben wird durch das Integral

$$(i) \int_0^1 \int_0^1 (4 - x - 2y)dxdy \qquad \text{beziehungsweise} \qquad (ii) \int_0^1 \int_0^1 (2 - x^2 - y^2)dydx.$$

**Aufgabe 4:** [Volumen der Kegeln]
Es sei $A \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar und für $r > 0$ und $h > 0$ sei

$$rA = \{\, (rx, ry) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \in A \,\} \subset \mathbb{R}^2$$
$$K = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z \leq h \text{ und } (x, y) \in zA \,\}$$

Zeigen Sie, dass $rA$ und $K$ Jordan-messbar sind mit

(a) $\operatorname{vol}^2(rA) = r^2 \operatorname{vol}^2 A$

(b) $\operatorname{vol}^3(K) = \frac{h^3}{3} \operatorname{vol}^2 A = \frac{h}{3} vol^2(hA)$