Übungsblatt 1 zur Vorlesung "Differentialgeometrie II", WS 16/17

Prof. V. Bangert **25. 10. 2016**

Bitte schreiben Sie Ihre Name auf Ihre Lösung. *Abgabe am 3. November 2016 in der Vorlesung.*

Aufgabe 1. Es sei $F : M \to M$ Isometrie der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) und

$$\mathrm{Fix}(F) = \{p \in M \mid F(p) = p\}$$

die Fixpunktmenge von F.

Zeigen Sie: Ist $\mathrm{Fix}(F) \neq \varnothing$, so ist jede Zusammenhangskomponente von $\mathrm{Fix}(F)$ eine totalgeodätische Untermannigfaltigkeit von (M, g).

Anleitung: Sei $p \in \mathrm{Fix}(F)$. Benutzen Sie die Gleichung $F \circ \exp_p = \exp_p \circ F_{*p}$ um zu zeigen: Ist $r > 0$ und $\exp_p|_{B(0_p,r)} : B(0_p, r) \to V \subset M$ Diffeomorphismus, so gilt

$$\mathrm{Fix}(F) \cap V = \{\exp_p(v) \mid v \in B(0_p, r) \text{ und } F_{*p}v = v\}.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle abgeschlossenen zusammenhängenden totalgeodätischen Untermannigfaltigkeiten des Lorentzmodells (M_L^m, g^L) des hyperbolischen Raums.

Aufgabe 3. Der Clifford-Torus T ist die 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit $T = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(S^1 \times S^1)$ der Standardsphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, d.h.

$$T = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\varphi, \sin\varphi, \cos\theta, \sin\theta) \mid (\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Berechnen Sie ein Einheitsnormalenvektorfeld und die 2.Fundamentalform von T in S^3, und die Gaußsche Krümmung von T (bzgl. der von S^3 induzierten Metrik). Zeigen Sie:

$F : \mathbb{R}^2 \to T,\ F(\varphi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\varphi, \sin\varphi, \cos\theta, \sin\theta)$ ist eine lokalisometrische Überlagerung der euklidischen Ebene auf den Clifford-Torus.

Aufgabe 4. Berechnen Sie den Betrag der Hauptkrümmungen der "Kleinsphären"

$$S_r^{m-1,S} := \{x \in S^m \subset \mathbb{R}^{m+1} \mid x_{m+1} = \cos r\} \text{ in } S^m \text{ für } 0 < r < \pi,$$

bzw. von

$$S_r^{m-1,L} := \{x \in M_L^m \subset \mathbb{R}^{m+1} \mid x_{m+1} = \cosh r\} \text{ in } M_L^m \text{ für } 0 < r < \infty.$$

Anwesenheitsaufgaben für Freitag 28. Oktober 2016

Anwesenheitsaufgabe 1.
Bestimmen Sie alle abgeschlossenen zusammenhängenden totalgeodätischen Untermannigfaltigkeiten des euklidischen Raums $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl.}})$ und der Standardsphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Anwesenheitsaufgabe 2.
Aufgabe 4 für Sphären $S_r^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r\}$ in $\mathbb{R}^n$ für $0 < r < \infty$.