Übungsblatt 10 zur Vorlesung “Differentialgeometrie II”, WS 16/17

Prof. V. Bangert **10. 1. 2017**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. Abgabe am 17. Januar 2017 in der Vorlesung.

Aufgabe 1. *Geschlossene Geodätische in freien Homotopieklassen*

Sei $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ die universelle Riemannsche Überlagerung der zusammenhängenden kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) (d.h. $\tilde{M}$ ist einfach zusammenhängend und $\pi^* g = \tilde{g}$) und $\Gamma \subset I(\tilde{M}, \tilde{g})$ die Gruppe der Decktransformationen (d.h. $\Gamma = \{\gamma \in I(\tilde{M}, \tilde{g}) \mid \pi \circ \gamma = \pi\}$). Zeigen Sie:

a) Ist $x \in \tilde{M}$, so ist $K = \{y \in \tilde{M} \mid \tilde{d}(x, y) \leq \tilde{d}(\gamma x, y)$ für alle $\gamma \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}\}\}$ ein kompakter *Fundamentalbereich* von Γ, d.h. $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K = \tilde{M}$ und für alle $\gamma \neq \gamma' \in \Gamma$ enthält $\gamma K \cap \gamma' K$ keine inneren Punkte.

b) Ist $\gamma \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}\}$, so nimmt die Funktion $f_\gamma : \tilde{M} \to \mathbb{R}$, $f_\gamma(x) = d(x, \gamma x)$ ihr Infimum $\inf f_\gamma > 0$ an.

   Hinweis: Ist $x = \tau y$ für $y \in K, \tau \in \Gamma$, so gilt $f_\gamma(x) = d(y, \tau^{-1} \gamma \tau y)$ und für jedes $C > 0$ existieren nur endlich viele $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ mit $d(\tilde{y}, \tilde{\gamma} \tilde{y}) < C$ für ein $\tilde{y} \in K$.

c) Es sei $\gamma \in \Gamma \backslash \{\mathrm{id}\}$ und $x_0 \in \tilde{M}$ mit $f_\gamma(x_0) = \inf f_\gamma$. Sei $\tilde{c} : \mathbb{R} \to \tilde{M}$ eine Geodätische, so daß $\tilde{c}|_{[0,1]}$ eine Kürzeste von x_0 nach γx_0 ist. Dann gilt $\gamma \circ \tilde{c}(t) = \tilde{c}(t+1)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

   Hinweis: Es genügt, $\gamma_* \dot{\tilde{c}}(0) = \dot{\tilde{c}}(1)$ zu zeigen. Falls $\gamma_* \dot{\tilde{c}}(0) \neq \dot{\tilde{c}}(1)$, so folgt (1. Variation der Bogenlänge) $d(\tilde{c}(t), \gamma \tilde{c}(t)) < d(\tilde{c}(0), \gamma \tilde{c}(0))$ für kleine $t > 0$.

d) Für die Geodätische $\tilde{c}$ aus c) ist $c := \pi \circ \tilde{c}$ geschlossene (periodische) Geodätische, $c(t+1) = c(t)$, mit minimaler Länge in ihrer freien Homotopieklasse. Das heißt, es gilt

$$L(c|_{[0,1]}) = \min\{L(b) \mid b : [0,1] \to M, b(0) = b(1) \text{ und es existiert Homotopie } \alpha : [0,1] \times [0,1] \to M \text{ mit } \alpha_0(t) = c(t), \alpha_1(t) = b(t) \text{ und } \alpha(0, \tau) = \alpha(1, \tau) \text{ für alle } \tau \in [0,1]\}$$

Aufgabe 2. *Wiederholung der Aufgabe 1, Blatt 9*

Sei (M, g) orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit positiver Schnittkrümmung und gerader Dimension und $c : \mathbb{R} \to M$ nichtkonstante Geodätische, die periodisch mit der Periode $T > 0$ ist, d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $c(t + T) = c(t)$ (“c geschlossene Geodätische”).

Zeigen Sie: Es gibt eine C^∞ Variation $\alpha : \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ von $\alpha_0(t) = c(t)$ durch T-periodische Kurven $\alpha_\tau(t) := \alpha(t, \tau)$ (d.h. es gilt $\alpha(t + T, \tau) = \alpha(t, \tau)$ für alle $(t, \tau) \in \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$), so dass für alle $0 \neq \tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt:

$$L(\alpha_\tau|_{[0,T]}) < L(c|_{[0,T]}).$$

Anleitung: Finden Sie ein T-periodisches, paralleles und zu $\dot{c}$ orthogonales Vektorfeld $0 \neq V \in \Gamma(c^* TM)$ und betrachten Sie $\alpha(t, \tau) = \exp_{c(t)}(\tau V(t))$.

Aufgabe 3.

Sei N abgeschlossene Untermannigfaltigkeit einer vollständigen, zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) und $d_N : M \to [0, \infty)$ sei die durch

$$d_N(q) = \inf\{d(p, q) \mid p \in N\}$$

definierte Abstandsfunktion von N.

a) Zeigen Sie: Für alle $q \in M$ existiert eine Geodätische $c : [0, 1] \to M$ mit $c(0) \in N$, $c(1) = q$ und $L(c) = d_N(q)$ (d.h. $d_N(q) = d(c(0), p)$ und c ist kürzeste Kurve von N nach q).

   Es gilt dann: $\dot{c}(0) \in TN^{\perp}$.

b) Ist $\exp : TM \to M$ die Exponentialabbildung von M, so heißt $\exp_N := \exp|_{TN^{\perp}} : TN^{\perp} \to M$ die normale Exponentialabbildung von N. Ein $v \in TN^{\perp}$ heißt Fokalvektor von N, falls $\mathrm{kern}((\exp_N)_{*v}) \neq \{0\}$, d.h. falls $\exp_N$ in keiner Umgebung von v (in $TN^{\perp}$) Diffeomorphismus ist.

   Zeigen Sie: Ist c Geodätische wie in a) und $t \in [0, 1)$, so ist $t\dot{c}(0)$ nicht Fokalvektor von N.

   Hinweis: Verwenden Sie Blatt 9, Aufgabe 2, Lemma (3.5) und die Beweisidee von Satz (6.9).