Übungsblatt 11 zur Vorlesung "Differentialgeometrie II", WS 16/17

Prof. V. Bangert **17. 1. 2017**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. Abgabe am 24. Januar 2017 in der Vorlesung.

Aufgabe 1.
Sei (M, g) orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $F \in \text{Iso}(M, g)$. $N \neq \varnothing$ sei eine Zusammenhangskomponente der Menge der Fixpunkte von F. Nach Blatt 1, Aufgabe 1, ist N dann eine totalgeodätische Untermannigfaltigkeit von (M, g). Zeigen Sie:

a) Ist $\dim M$ ungerade und F orientierungserhaltend, so ist $\dim N$ ungerade.

b) Ist $\dim M$ gerade und F orientierungsumkehrend, so ist $\dim N$ ungerade.

Insbesondere gibt es in beiden Fällen a) und b) keine isolierten Fixpunkte von F.

Aufgabe 2.
Sei (M, g) vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \leq 0$ und $c_0, c_1 : \mathbb{R} \to M$ nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(s) = d(c_0(s), c_1(s))$ ist konvex.

b) Ist $f = \text{const.}$ und $c_0(\mathbb{R}) \neq c_1(\mathbb{R})$, so existiert $d > 0$ und ein Streifen $S = [0, d] \times \mathbb{R}$ in der euklidischen Ebene und eine isometrische, totalgeodätische Immersion $F : S \to M$ mit $F(\{0\} \times \mathbb{R}) = c_0(\mathbb{R}), F(\{d\} \times \mathbb{R}) = c_1(\mathbb{R})$. Speziell gilt für jede Tangentialebene E an $F(S) : K(E) = 0$.

Aufgabe 3.
Ist (M, g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K < 0$, so existiert in jeder freien Homotopieklasse von M (bis auf Umparametrisierung) höchstens eine geschlossene Geodätische.

Anleitung: Liften Sie die Situation in die universelle Überlagerung von (M, g) und benutzen Sie Aufgabe 2, b).

Aufgabe 4.
Sei (M, g) vollständige, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit

a) Gilt $K \leq 0$, so ist für jedes $p \in M$ die Distanzfunktion $d_p : M \to [0, \infty)$ von p, $d_p(q) := d(p, q)$, konvex.

b)* Gilt $K \leq -1$, so gilt für jedes $p \in M$ und jedes $r > 0$: Die 2.Fundamentalform h der metrischen Sphäre $S_r(p) = \partial B(p, r) = d_p^{-1}(r)$ erfüllt bezüglich des nach innen weisenden Einheitsnormalvektorfelds N von $S_r(p)$

$$\langle h(X, X), N \rangle \geq \coth(r) \langle X, X \rangle$$

für alle $X \in \Gamma(TS_r(p))$.