Übungsblatt 12 zur Vorlesung “Differentialgeometrie II”, WS 16/17

Prof. V. Bangert **24. 1. 2017**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. Abgabe am 31. Januar 2017 in der Vorlesung.

Aufgabe 1.
Sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{M}^2_{K_0}$ Geodätische mit $|\dot{c}| = 1$ und sei Y ein Jacobifeld längs c mit $Y(0) = 0$ und $\langle Y, \dot{c}\rangle = 0$. Zeigen Sie: Für alle $t \in (0, D_{K_0})$ gilt

$$\langle Y', Y\rangle(t) = \frac{S'(t)}{S(t)}\langle Y, Y\rangle(t)$$

(, wobei $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung von $S'' + K_0 S = 0$ mit $S(0) = 0$, $S'(0) = 1$, ist.)
Hinweis: Sie können das Ergebnis von Blatt 3, Aufgabe 3 benützen.

Aufgabe 2.
Sei $\Delta = (c_0, c_1, c)$ ein Dreiseit auf $\mathbb{S}^2_1$. Zeigen Sie:

a) Der Umfang $l_0 + l_1 + l$ von Δ ist höchstens 2π.

b) Ist eine der Seitenlängen gleich π, etwa $l = \pi$, so ist $c_0^{-1} * c_1$ ein halber Großkreis (mit Endpunkten $c(0)$ und $c(\pi) = -c(0)$).

c) Gilt $l_0 + l_1 + l = 2\pi$ und sind alle Seitenlängen kleiner als π, so ist die Vereinigung der (Bildmengen der) c_0, c_1, c ein Großkreis von $\mathbb{S}^2_1$, und alle Winkel von Δ sind π.

Aufgabe 3.
Seien $\Delta = (c_0, c_1, c)$, $\tilde{\Delta} = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c})$ Dreiseite auf $\mathbb{S}^2_1$ mit $l_0 = \tilde{l}_0$, $l_1 = \tilde{l}_1$, $l = \tilde{l}$ und $l_0 + l_1 + l < 2\pi$.

Zeigen Sie: Δ und $\tilde{\Delta}$ sind kongruent, d.h. es existiert $A \in O(3)$ mit $A \circ c_0 = \tilde{c}_0$, $A \circ c_1 = \tilde{c}_1$ und $A \circ c = \tilde{c}$.

Aufgabe 4.
Ist (M, g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq 1$ und $\Delta = (c_0, c_1, c)$ Dreiseit in (M, g) mit Umfang $l_0 + l_1 + l = 2\pi$ und allen Seitenlängen kleiner als π, so sind die Winkel $\alpha_0, \alpha_1, \alpha$ von Δ alle gleich π (, so dass sich c_0, c und c_1^{-1} zu einer geschlossenen Geodätischen zusammenschließen).
Anleitung: Um $\alpha = \pi$ zu zeigen, betrachte

$$t_0 := \inf\{t \in [0, l_0] \mid d(p, c_0(t)) + d(c_0(t), p_1) = l_0 + l\}.$$

Wegen $l_1 < \pi$ gilt $t_0 > 0$. Für $\tau \in (0, t_0)$ existiert ein Dreiseit $\Delta^\tau = (c_0|_{[0,\tau]}, c_1, c^\tau)$. c^τ ist also eine Kürzeste von $c_0(\tau)$ nach $p_1 = c_1(l_1)$ und wegen $\tau < t_0$ gilt mit $l^\tau = L(c^\tau) = d(c_0(\tau), p_1)$:

$$d(p, c_0(\tau) + d(c_0(\tau), p_1) = \tau + l^\tau < l_0 + l.$$

Also hat Δ^τ Umfang $\tau + l_\tau + l_1 < l_0 + l_1 + l = 2\pi$. Aus dem Winkelvergleichssatz von Toponogov und Aufgabe 2 folgt nun, dass alle Winkel von Δ^τ für $\tau \to t_0$ gegen π konvergieren, speziell gilt $\alpha^\tau = \alpha = \pi$.