Übungsblatt 13 zur Vorlesung "Differentialgeometrie II", WS 16/17

Prof. V. Bangert **31. 1. 2017**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 7. Februar 2017 in der Vorlesung.*

Aufgabe 1.
Seien $l_0, l_1, l \in [0, 2\pi]$, und es gelte

$$l_0 + l_1 \geq l,\ l_0 + l \geq l_1 \text{ und } l_1 + l \geq l_0,$$

sowie $l_0 + l_1 + l \leq 2\pi$.
Dann existiert ein Dreiseit Δ auf $\mathbb{S}^2_1$ mit den Seitenlängen l_0, l_1, l.

Aufgabe 2.
Ist (M, g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq 1$ und Durchmesser π, d.h.–wegen Bonnet-Myers–es existieren $p, \bar{p} \in M$ mit $d(p, \bar{p}) = \pi$. Zeigen Sie:

a) Für alle $r \in M$ gilt $d(p, r) + d(r, \bar{p}) = d(p, \bar{p})$

b) $\exp_p |_{B(0_p, \pi)}$ ist Diffeomorphismus und $\exp_p(\partial B(0_p, \pi)) = \{\bar{p}\}$

c) Ist $v \in TM_p$, $|v| = 1$ und $c_v(t) := \exp_p(tv)$, so gilt für alle $t_0 \in [0, \pi]$ und alle Ebenen $E \in G_2(TM_{c_v(t_0)})$ mit $\dot{c}_v(t_0) \in E$: $K(E) = 1$.

d) (M, g) ist isometrisch zur Einheitsphäre $\mathbb{S}^m_1$, $m = \dim M$.

Anleitung:

a) Dreiecksungleichung zusammen mit (7.9).

b) folgt aus a), (7.9)(b) und (6.9)

c) Sei $0 \neq w \in E$, $\langle w, \dot{c}_v(t_0) \rangle = 0$, und $W \in \Gamma(c_v^* TM)$ das parallele Vektorfeld längs c_v mit $W(t_0) = w$. Wende die 2. Variationsformel für $c_v|_{[0,\pi]}$ und das Variationsvektorfeld $V(t) = \sin(t)W(t)$ an.

d) Siehe (3.7).

Aufgabe 3.
Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Iso}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n, g^{FS})$ operiert transitiv auf dem Einheitstangentialbündel von $(\mathbb{C}\mathrm{P}^n, g^{FS})$, d.h. für alle $v, w \in T(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ mit $|v|^{g^{FS}} = |w|^{g^{FS}}$ existiert ein $F \in \mathrm{Iso}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n, g^{FS})$ mit $F_*(v) = w$.

   Hinweis: Folgerung (8.7)

b) $(\mathbb{C}\mathrm{P}^n, g^{FS})$ ist Einsteinmannigfaltigkeit.