Übungsblatt 2 zur Vorlesung "Differentialgeometrie II", WS 16/17

Prof. V. Bangert **3. 11. 2016**

Bitte schreiben Sie Ihren Name auf Ihre Lösung. *Abgabe am 8. November 2016 in der Vorlesung.*

Aufgabe 1. Seien M, N totalgeodätische Untermannigfaltigkeiten von $(\overline{M}, g)$ und $M \cap N \neq \varnothing$.

Zeigen Sie: Jede Zusammenhangskomponente von $M \cap N$ ist totalgeodätische Untermannigfaltigkeit von $(\overline{M}, g)$.

Bemerkung: Verschiedene Zusammenhangskomponenten von $M \cap N$ können verschiedene Dimensionen besitzen.

Anleitung: Zeigen Sie: Zu $p \in M \cap N$ existiert $\varepsilon > 0$, so dass die Exponentialabbildung $\overline{\exp}_p$ auf $B(0_p, \varepsilon) = \{v \in T\overline{M}_p \mid |v| < \varepsilon\}$ ein Diffeomorphismus ist und so dass

$$M \cap B(p, \varepsilon) = \{\overline{\exp}_p(v) \mid v \in TM_p, |v| < \varepsilon\} \text{ und}$$
$$N \cap B(p, \varepsilon) = \{\overline{\exp}_p(v) \mid v \in TN_p, |v| < \varepsilon\} \text{ gilt.}$$

Dann gilt $M \cap N \cap B(p, \varepsilon) = \{\overline{\exp}_p(v) \mid v \in TM_p \cap TN_p, |v| < \varepsilon\}$.

Aufgabe 2. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie:

a) Zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine Umgebung U um p in M und V um 0_p in TM, so dass $(\pi \times \exp)|_V : V \to U \times U$ ein Diffeomorphismus ist.

   Anleitung: Zeigen Sie, dass $TM_p \times \{0_p\}$ und $\{0_p\} \times TM_p$ im Bild von $(\pi \times \exp)_{*0_p} : T(TM)_{0_p} \to TM_p \times TM_p$ enthalten sind.

b) Zu jedem $p \in M$ existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Umgebung U von p, so dass für alle $q \in U$ gilt: $\exp_q |_{B(0_q, \varepsilon)} : B(0_q, \varepsilon) \to B(q, \varepsilon)$ ist ein Diffeomorphismus.

Aufgabe 3. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f : M \to \mathbb{R}$. f heißt konvex, falls für jede Geodätische $c : [a, b] \to M$ die reelle Funktion $f \circ c : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex ist.

a) Sei $f \in C^2(M, \mathbb{R})$. Dann ist f genau dann konvex, wenn die Hesseform $\nabla^2 f|_p$ von f an jedem Punkt $p \in M$ positiv semidefinit ist.
   (Sie können Aufgabe 3 von Blatt 14 zu Differentialgeometrie I, WS15/16, benutzen.)

b) Ist $f : M \to \mathbb{R}$ konvex, so sind alle Subniveaumengen $S_r^f := f^{-1}((-\infty, r])$, $r \in \mathbb{R}$, von f in folgendem Sinn "total konvex": Ist $c : [0, 1] \to M$ Geodätische mit $c(0) \in S_r^f$ und $c(1) \in S_r^f$, so gilt $c([0, 1]) \subset S_r^f$.

Aufgabe 4. Sei M Untermannigfaltigkeit des euklidischen Raums $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl.}})$, die (als Teilmenge von $\mathbb{R}^n$) abgeschlossen ist. Dann ist M mit der induzierten Metrik $i^* g_{\text{eukl.}}$ vollständig.

Bonusaufgabe: Finden Sie eine Untermannigfaltigkeit M von $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eukl.}})$, so dass $(M, i^* g_{\text{eukl.}})$ vollständig ist, aber M nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$.