Übungsblatt 3 zur Vorlesung “Differentialgeometrie II”, WS 16/17

Prof. V. Bangert **8. 11. 2016**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 15. November 2016 in der Vorlesung.*

Aufgabe 1. *(6 Punkte)*
Sei (M,g) zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $f : M \to [0,\infty)$ durch $f(x) := \frac{1}{2}\big(d^g(p,x)\big)^2$ definiert. Sei $r > 0$ so gewählt, dass $\varphi := \big(\exp_p|_{B(0_p,r)}\big)^{-1} : B(p,r) \to B(0_p,r)$ ein Diffeomorphismus ist.

a) Berechnen Sie $f \circ \varphi^{-1}$ und zeigen Sie, dass für alle $v \in TM_p$ gilt: $\nabla^2 f|_p(v,v) = |v|^2$.

b) Zeigen Sie, dass ein $\delta > 0$ mit folgender Eigenschaft existiert:
   Für alle $q, q' \in B(p,\delta)$ existiert (bis auf Parametrisierung) genau eine Kürzeste c von q nach q' und c liegt in $B(p,\delta)$.

   Hinweis: Sie können Blatt 2, Aufgaben 2 und 3 benutzen.

Aufgabe 2. *(6 Punkte)*
Seien $(\tilde{M},\tilde{g})$, (M,g) m-dimensionale, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $F \in C^\infty(\tilde{M},M)$ eine lokale Isometrie, d.h. $F^*g = \tilde{g}$.

Zeigen Sie: Ist $(\tilde{M},\tilde{g})$ vollständig, so ist auch (M,g) vollständig und F ist eine Überlagerungsabbildung.

Aufgabe 3. *(4 Punkte)*
Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung K und $c : \mathbb{R} \to M$ Geodätische mit $|\dot{c}| = 1$. Seien $v, w \in TM_{c(0)}$ mit $\langle v, \dot{c}(0)\rangle = 0 = \langle w, \dot{c}(0)\rangle$ und $V, W \in \Gamma(c^*TM)$ die parallelen Vektorfelder längs c mit $V(0) = v$, $W(0) = w$.

Zeigen Sie, dass das Jacobifeld Y längs c mit $Y(0) = v$, $Y'(0) = w$ gegeben ist durch

$$Y(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{K}t)V(t) + \sin(\sqrt{K}t)W(t) & \text{falls } K > 0, \\ V(t) + tW(t) & \text{falls } K = 0, \\ \cosh(\sqrt{-K}t)V(t) + \sinh(\sqrt{-K}t)W(t) & \text{falls } K < 0. \end{cases}$$

Hinweis: Für alle $p \in M$ und alle $u, v, w \in TM_p$, gilt

$$R(u,v)w = K(\langle v,w\rangle u - \langle u,w\rangle v),$$

vgl. DG I, Folgerung (9.14).