Übungsblatt 4 zur Vorlesung "Differentialgeometrie II", WS 16/17

Prof. V. Bangert **15. 11. 2016**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 22. November 2016 in der Vorlesung.*

Aufgabe 1.

Sei (M, g) vollständige, nichtkompakte, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$.

Zeigen Sie: Es existiert eine Geodätische $c : [0, \infty) \to M$ mit $c(0) = p$ und $|\dot{c}| = 1$, so dass für alle $s > 0$ gilt

$$d(p, c(s)) = s \ (= L(c|_{[0,s]}).$$

Anleitung: Zeigen Sie, dass eine Folge $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in M existiert mit $\lim_{i\to\infty} d(p, p_i) = \infty$ und betrachten Sie eine Folge von Kürzesten von p nach p_i.

Bemerkung: Eine solche Geodätische nennt man oft einen "Strahl".

Aufgabe 2.

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ m-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $b : V \times V \to \mathbb{R}$ symmetrische Bilinearform. Man definiert - unabhängig von der gewählten ONB $e_1, ..., e_m$ von V:

$$\operatorname{spur}(b) = \sum_{i=1}^{m} b(e_i, e_i).$$

Sei $S^{m-1} = \{v \in V \mid \langle v, v\rangle = 1\}$ die Einheitssphäre in V und $\mathrm{dvol}^{S^{m-1}}$ das Volumenelement von S^{m-1} (bzgl. der von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierten Metrik).

Zeigen Sie:

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\ S^{m-1}} \int_{S^{m-1}} b(v, v)\mathrm{dvol}^{S^{m-1}} = \frac{1}{m}\operatorname{spur}(b)$$

Anleitung: Zeigen Sie zunächst, dass die Integrale $\int_{S^{m-1}} \langle v, e_i\rangle^2 \mathrm{dvol}^{S^{m-1}}$ für alle $i = \{1, .., m\}$ übereinstimmen und verwenden Sie dass $|v|^2 = \sum_{i=1}^{m} \langle v, e_i\rangle^2$ gilt. Verwenden Sie dann eine ONB, die b diagonalisiert.

Aufgabe 3.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld und $\alpha : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega$ C^2. Erfüllt $y_\tau(t) := \alpha(t, \tau)$ für alle $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ die Differentialgleichung $\dot{y}_\tau(t) = F(y_\tau(t))$, so erfüllt $Y(t) := \frac{\partial\alpha}{\partial\tau}(t, 0)$ die längs y_0 linearisierte Differentialgleichung

$$Y'(t) = DF(y_0(t))Y(t).$$

Außerdem existiert zu jeder Integralkurve $y : [a, b] \to \Omega$ von F und jedem $v \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung $Y : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ von $Y'(t) = DF(y(t))Y(t)$ mit $Y(a) = v$ und eine Variation $\alpha : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \Omega$ wie oben mit $\frac{\partial\alpha}{\partial\tau}(t, 0) = Y(t)$ und $\alpha(t, 0) = y(t)$.

Aufgabe 4.
Zeigen Sie:

a) Die Abbildung $F : (0,\pi) \times S^{m-1} \to S^m \backslash \{e_{m+1}, -e_{m+1}\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$,

$$F(r,x) = ((\sin r)x, \cos r)$$

ist ein Diffeomorphismus.

b) Bezeichnen $g^{S^m}, g^{S^{m-1}}$ die üblichen Metriken auf S^m und S^{m-1}, so gilt

$$F^* g^{S^m} = dr^2 + \sin^2(r) g^{S^{m-1}}.$$

Anleitung: Zeigen Sie, dass für jedes $x \in S^{m-1}$ die Kurve $r \to F(r,x)$ nach Bogenlänge parametrisiert ist und dass sie für jedes $r \in (0,\pi)$ die "Kleinsphäre" $F(\{r\} \times S^{m-1}) \subset S^m$ orthogonal schneidet. Zeigen Sie weiter, dass für jedes $r \in (0,\pi)$ die Abbildung

$$F_r : S^{m-1} \to F_r(S^{m-1}) \subset S^m \ , \ F_r(x) = F(r,x)$$

eine Homothetie ist mit $F_r^* g^{S^m} = \sin^2(r) g^{S^{m-1}}$.

c)* Die gleiche Aufgabe wie in Teilen a) und b) aber für das Lorentzmodell (M_L^m, g^L) des hyperbolischen Raums, wobei $F : (0,\infty) \times S^{m-1} \to M_L^m \backslash \{e_{m+1}\}$ durch $F(r,x) := (\sinh(r)x, \cosh(r))$ gegeben ist und $F^* g^L = dr^2 + (\sinh)^2(r) g^{S^{m-1}}$ gilt.