Übungsblatt 5 zur Vorlesung "Differentialgeometrie II", WS 16/17

Prof. V. Bangert **22. 11. 2016**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 29. November 2016 in der Vorlesung.*

Aufgabe 1.

Sei (M,g) m-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Riccikrümmung Ric und Skalarkrümmung S. Sei $p \in M$ und $SM_p := \{v \in TM_p \mid |v| = 1\}$. Zeigen Sie:

a)
$$S(p) = \frac{m}{\mathrm{vol}_{m-1}(S^{m-1})} \int_{SM_p} \mathrm{Ric}(v,v)\,\mathrm{dvol}^{SM_p}(v)$$

b) Zu $v \in SM_p$ sei $S^{m-2}(v) = \{u \in SM_p \mid \langle u, v\rangle = 0\}$ die Einheitssphäre im orthogonalen Komplement von v in TM_p. Dann gilt
$$\mathrm{Ric}(v,v) = \frac{m-1}{\mathrm{vol}_{m-2}(S^{m-2})} \int_{S^{m-2}(v)} K(\mathrm{span}\{u,v\})\,\mathrm{dvol}^{S^{m-2}(v)}(u).$$

Hinweis: Sie können das Ergebnis von Blatt 4, Aufgabe 2, benutzen.

Aufgabe 2. (8 Punkte)
Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) heißt lokal symmetrisch, wenn der Riemannsche Krümmungstensor $R \in \Gamma(T_4^0 M)$ parallel ist, d.h. wenn für alle $X \in \Gamma(TM)$ gilt: $\nabla_X R = 0$. Zeigen Sie:

a) (M,g) ist genau dann lokal symmetrisch, wenn für alle $p \in M$, $v, w_1, ..., w_4 \in TM_p$, gilt:
$$R(P_{0,t}^{c_v}(w_1), ..., P_{0,t}^{c_v}(w_4)) \text{ ist unabhängig von } t.$$

b) Sei (M,g) lokal symmetrisch und $p \in M$. Dann existiert eine Umgebung U von p und eine Isometrie $F : (U, g|_U) \to (U, g|_U)$ mit $F(p) = p$ und $F_{*p} = -\,\mathrm{id}_{TM_p}$. F heißt *Spiegelung an p*.

Hinweis: Benutzen Sie Satz (3.7).

c) Sei (M,g) lokal symmetrisch, $c : [0,1] \to M$ Geodätische und $p := c(0), \bar{p} := c(1)$. Dann existieren Umgebungen U von p und V von $\bar{p}$ und eine Isometrie $F : (U, g|_U) \to (V, g|_V)$ mit $F(p) = \bar{p}$ und $F_{*p} = P_{0,1}^c$.

Anleitung: F ist Produkt von zwei Spiegelungen.

Aufgabe 3.
Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Cività-Zusammenhang ∇. Zeigen Sie:

a) g ist parallel bzgl. ∇, d.h. für alle $X \in \Gamma(TM)$ gilt $\nabla_X g = 0$.

b) Ist $T \in \Gamma(T_2^0 M)$ symmetrisches $(0,2)$-Tensorfeld, so definiert man $\mathrm{div}\, T \in \Gamma(T_1^0 M) = \Gamma(TM^*)$ durch
$$(\mathrm{div}\, T)(v) := \sum_{i=1}^m (\nabla_{e_i} T)(e_i, v),$$
falls $v \in TM_p$ und $e_1, ..., e_m$ ONB von (TM_p, g_p). Dann gilt für alle $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$: $\mathrm{div}\,(fg) = df$.