Übungsblatt 6 zur Vorlesung "Differentialgeometrie II", WS 16/17

Prof. V. Bangert **29. 11. 2016**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 6. Dezember 2016 in der Vorlesung.*

Aufgabe 1.

Sei R der Krümmungstensor einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) mit Levi-Cività-Zusammenhang ∇. Zeigen Sie: Für alle $U, V, W, X, Y \in \Gamma(TM)$ gilt:

a) $(\nabla_X R)(U, V, W) = -(\nabla_X R)(V, U, W)$

b) $\langle (\nabla_X R)(U, V, W), Y \rangle = -\langle (\nabla_X R)(U, V, Y), W \rangle$

c) $\langle (\nabla_X R)(U, V, W), Y \rangle = \langle (\nabla_X R)(W, Y, U), V \rangle$

Hinweis: Warum können Sie annehmen, dass an einem gegebenen, festen Punkt $p \in M$ alle kovarianten Ableitungen von U, V, W, Y nach X gleich null sind?

Aufgabe 2.

Zeigen Sie: Für 3-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M, g) lässt sich die Schnittkrümmung K aus der Ricci-Krümmung berechnen. Speziell sind 3-dimensionale Einsteinräume stets von konstanter Schnittkrümmung.

Anleitung: Ist (e_1, e_2, e_3) ONB von TM_p und $E_{ij} := \mathrm{span}\{e_i, e_j\} \in G_2(TM_p)$ für $1 \leq i < j \leq 3$, so können Sie

$$\mathrm{Ric}(e_1, e_1) = K(E_{12}) + K(E_{13})$$

(u.s.w.) zeigen und das als lineares Gleichungssystem für die $K(E_{ij})$ interpretieren.

Aufgabe 3.

Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $e_1, ..., e_m$ ONB von TM_p. Dann gibt es in einer Umgebung von p ein ONBfeld $E_1, ..., E_m$ mit $E_i|_p = e_i$ und $\nabla E_i|_p = 0$ (d.h. $\nabla_v E_i = 0$ für alle $v \in TM_p$) für $1 \leq i \leq m$.