Übungsblatt 7 zur Vorlesung "Differentialgeometrie II", WS 16/17

Prof. V. Bangert **6. 12. 2016**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 13. Dezember 2016 in der Vorlesung.*

Aufgabe 1. *Beweisdetails zu Satz (5.1)*

Sei Y wegzusammenhängender und einfach zusammenhängender topologischer Raum, Γ_1 und Γ_2 Untergruppen der Gruppe der Homöomorphismen von Y, die frei und eigentlich diskontinuierlich auf Y operieren, und $\pi_1 : Y \to Y/\Gamma_1$, $\pi_2 : Y \to Y/\Gamma_2$ die zugehörigen Überlagerungen.

a) Beweisen Sie unter Ausnützung des "Liftungskriteriums" aus der Theorie der Überlagerungen:

Ist $h : Y/\Gamma_1 \to Y/\Gamma_2$ stetig, so existiert eine stetige Abbildung $\tilde{h} : Y \to Y$ mit $\pi_2 \circ \tilde{h} = h \circ \pi_1$. Es gilt

$$\{f : Y \to Y \text{ stetig } \mid \pi_2 \circ f = h \circ \pi_1\} = \{\gamma_2 \circ \tilde{h} \circ \gamma_1 \mid \gamma_1 \in \Gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_2\}$$

Ist h Homöomorphismus, so ist auch $\tilde{h}$ Homöomorphismus.

b) Für $i \in \{1, 2, 3\}$ seien (M_i, g_i) Riemannsche Mannigfaltigkeiten (der gleichen Dimension) und $f_1 : M_1 \to M_3$, $f_2 : M_2 \to M_3$ lokale Isometrien und $h : M_1 \to M_2$ stetig.

Zeigen Sie: Gilt $f_2 \circ h = f_1$, so ist h ebenfalls lokale Isometrie. Gilt diese Aussage auch ohne die Voraussetzung, dass h stetig ist?

Aufgabe 2. *Krümmungstensor von Produktmetriken*

Seien (M_1, g_1), (M_2, g_2) Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $M = M_1 \times M_2$ die Produktmannigfaltigkeit mit den Projektionen $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$, $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ und Produktmetrik $g = \pi_1^* g_1 + \pi_2^* g_2$.

a) Sei φ_1 Karte von M_1, φ_2 Karte von M_2. Berechnen Sie die Christoffelsymbole und die Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors von g bzgl. der Karte $\varphi_1 \times \varphi_2$ von $M_1 \times M_2$ (aus den entsprechenden Größen von (M_i, g_i) bzgl. φ_i, $i = 1, 2$).

b) Sei $p = (p_1, p_2) \in M$, $v_1 \in T(M_1)_{p_1} \backslash \{0_{p_1}\}$, $v_2 \in T(M_2)_{p_2} \backslash \{0_{p_2}\}$ und $E = \operatorname{span}\{(v_1, 0_{p_2}), (0_{p_1}, v_2)\} \in G_2(TM_p)$.

Zeigen Sie: $M_1 \times \{p_2\}$ und $\{p_1\} \times M_2$ sind totalgeodätisch in (M, g), und es gilt $K(E) = 0$.

c) Zeigen Sie: Die Riemannsche Produktmannigfaltigkeit $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{H}_1^2$ hat Skalarkrümmung $S = 0$. Ist die Volumenwachstumsfunktion $\operatorname{vol}_4(B(p, r))$ für $p \in \mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{H}_1^2$ die gleiche wie die im euklidischen $\mathbb{E}^4$?

Aufgabe 3. *Flache 2-Tori*

Sind $v, w \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig, so heißt die Untergruppe $\Gamma = \mathbb{Z}v + \mathbb{Z}w$ von $(\mathbb{R}^2, +)$ ein Gitter in $\mathbb{R}^2$. Γ operiert auf $\mathbb{E}^2$ durch Translation und der Quotient $T_\Gamma := \mathbb{E}^2/\Gamma$ ist ein "flacher Torus".

a) Zeigen Sie: Sind Γ_1, Γ_2 Gitter in $\mathbb{R}^2$, so sind T_{Γ_1} und T_{Γ_2} genau dann isometrisch, wenn eine orthogonale Abbildung $A \in O(2)$ existiert, so dass $A\Gamma_1 = \Gamma_2$ gilt. (Solche Gitter Γ_1 und Γ_2 heißen kongruent.)

b) Sei $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\ x^2 + y^2 \geq 1\}$.

Zeigen Sie: Zu jedem Gitter Γ in $\mathbb{R}^2$ existiert genau ein $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und genau ein $u \in F$, so dass $\lambda \cdot \Gamma$ zu $\mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}u$ kongruent ist.

Anleitung: Man wähle wie folgt eine Basis v, w für Γ:

- $v \in \Gamma$ sei ein Vektor minimaler Länge in $\Gamma \backslash \{0\}$.
- $w \in \Gamma \backslash \mathbb{Z}v$ sei ein Vektor minimaler Länge in $\Gamma \backslash \mathbb{Z}v$.

Ersetzt man Γ durch $\lambda\Gamma$ mit $\lambda = \frac{1}{|v|}$, so kann man $|v| = 1$ annehmen. Man kann dann $A \in O(2)$ finden mit $Av \in \{e_1, -e_1\}$ und $Aw \in F$.