Übungsblatt 8 zur Vorlesung "Differentialgeometrie II", WS 16/17

Prof. V. Bangert **13. 12. 2016**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 20. Dezember 2016 in der Vorlesung.*

Aufgabe 1. *Linsenräume*
Betrachte S^3 in $\mathbb{C}^2$. Für teilerfremde $p, q \in \mathbb{N}$ sei

$$\Gamma_{(p,q)} = \left\{h : S^3 \to S^3 \mid \exists\, n \in \{0, ..., q-1\} : h(z_1, z_2) = \left(e^{2\pi i \frac{n}{q}} z_1, e^{2\pi i \frac{np}{q}} z_2\right)\right\}.$$

Zeigen Sie:

- $\Gamma_{(p,q)}$ ist Untergruppe von $SO(4)$
- $\Gamma_{(p,q)}$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$
- $\Gamma_{(p,q)}$ operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf S^3

Aufgabe 2.

a) Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und seien $c_1 : [a, b] \to M$, $c_2 : [a, b] \to M$ zwei nach Bogenlänge parametrisierte, minimale geodätische Segmente mit $c_1(a) = c_2(a)$, $c_1(b) = c_2(b)$ und $\dot{c}_1(b) \neq \dot{c}_2(b)$.
Zeigen Sie: Für kein $\varepsilon > 0$ ist die Fortsetzung von c_i auf $[a, b + \varepsilon]$, $i \in \{1, 2\}$, ein minimales geodätisches Segment.

b) Sei $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ der 2-dimensionale euklidische Raum und $\Gamma := \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mid f(x) = x + l \cdot e_1, l \in \mathbb{Z}\}$. Betrachten Sie auf dem Zylinder $Z = \mathbb{R}^2/\Gamma$ mit der induzierten Metrik g (vgl. DGI, Blatt 9, Aufgabe 4a) alle nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen c, die von einem festen Punkt $p \in Z$ starten. Bestimmen Sie abhängig von der Richtung das maximale Intervall I, fur das $c|_I$ minimal ist.

Aufgabe 3. *Zur Konstruktion von Flächen mit $K = -1$.*
Sei (M, g) 2-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $c : [a, b] \to M$ injektive Geodätische mit $|\dot{c}| = 1$. Sei $N \in \Gamma(c^*TM)$ Einheitsnormalfeld längs c, d.h. $\langle N, N\rangle = 1$ und $\langle N, \dot{c}\rangle = 0$.
Zeigen Sie:

a) Es existiert $\varepsilon > 0$, so dass $H : (-\varepsilon, \varepsilon) \times (a, b) \to M$, $H(s, t) = \exp_{c(t)}(sN(t))$ Diffeomorphismus ist.

b) Für alle $(s, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times (a, b)$ gilt

$$(H^*g)_{(s,t)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22}(s, t) \end{bmatrix}$$

wobei $g_{22}(0, t) = 1$, $\dfrac{\partial g_{22}}{\partial s}(0, t) = 0$ und $\dfrac{\partial^2 \sqrt{g_{22}}}{\partial s^2} = -\sqrt{g_{22}} \cdot K \circ H$ ($K =$ Gaußsche Krümmung von g) gilt.
Hinweis: Sie können Lemma (3.5) anwenden.

c) Hat g konstante Gaußsche Krümmung $K = -1$, so gilt $g_{22}(s, t) = \cosh^2(s)$.