Übungsblatt 9 zur Vorlesung "Differentialgeometrie II", WS 16/17

Prof. V. Bangert **20. 12. 2016**

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Lösung. *Abgabe am 10. Januar 2017 in der Vorlesung.*

Aufgabe 1.

Sei (M, g) orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit positiver Schnittkrümmung und gerader Dimension und $c : \mathbb{R} \to M$ nichtkonstante Geodätische, die periodisch mit der Periode $T > 0$ ist, d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $c(t + T) = c(t)$ ("c geschlossene Geodätische").

Zeigen Sie: Es gibt eine C^∞ Variation $\alpha : \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ von $\alpha_0(t) = c(t)$ durch T-periodische Kurven $\alpha_\tau(t) := \alpha(t, \tau)$ (d.h. es gilt $\alpha(t+T, \tau) = \alpha(t, \tau)$ für alle $(t, \tau) \in \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$), so dass für alle $0 \neq \tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt:

$$L(\alpha_\tau|_{[0,T]}) < L(c|_{[0,T]}).$$

Anleitung: Finden Sie ein T-periodisches, paralleles und zu $\dot{c}$ orthogonales Vektorfeld $0 \neq V \in \Gamma(c^*TM)$ und betrachten Sie $\alpha(t, \tau) = \exp_{c(t)}(\tau V(t))$.

Aufgabe 2.

Für $q \geq 5$ und dazu teilerfremdes $p \in \{1, ..., q-1\}$ sei $\Gamma_{(p,q)} < SO(4)$ wie in Blatt 8, Aufgabe 1, definiert.

Zeigen Sie: Ist $1 < p < q-1$, so sind $\Gamma_{(1,q)}$ und $\Gamma_{(p,q)}$ nicht konjugiert in $GL(4, \mathbb{R})$. (Die Quotienten $S^3/\Gamma_{(1,q)}$ und $S^3/\Gamma_{(p,q)}$ haben also isomorphe Fundamentalgruppen $\cong \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, sind aber nicht isometrisch.)

Anleitung: Zu $0 < \varphi < \psi$ mit $\varphi + \psi \neq 2\pi$, sei $\gamma \in SO(4)$ durch $\gamma(z, w) = (e^{i\varphi} z, e^{i\psi} w)$ definiert. Zeigen Sie, dass $\mathbb{C} \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathbb{C}$ die einzigen 2-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sind, die durch γ auf sich abegbildet werden.

Aufgabe 3.

Sei N Untermannigfaltigkeit einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g). Für $p \in N$ und $v_0 \in TN_p^\perp$ wird die "Weingartenabbildung" $S_{v_0} : TN_p \to TN_p$ von N bzgl. v_0 definiert durch: Für alle $w, z \in TN_p$ gilt

$$\langle S_{v_0}(w), z \rangle = \langle h(w, z), v_0 \rangle$$

($h = 2$. Fundamentalform von N).

Zeigen Sie: Ist $v : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TN^\perp$ C^∞-Kurve mit $v(0) = v_0$ und Fußpunktkurve $\gamma(t) = \pi \circ v(t)$ in N, und ist $\alpha : [0, T] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ die durch

$$\alpha(t, \tau) = \exp(tv(\tau))$$

definierte Variation von $\alpha_0(t) = \exp(tv_0)$, so ist $Y(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial \tau}(t, 0)$ das Jacobifeld längs α_0 mit den Anfangswerten

$$Y(0) = \dot{\gamma}(0) \in TN_p \text{ und } Y'(0) = S_{v_0}(Y(0)).$$

Umgekehrt ist jedes Jacobifeld Y längs $\alpha_0(t) = \exp(tv_0)$ mit $Y(0) \in TN_p$ und $Y'(0) = S_{v_0}(Y(0))$ Variationsvektorfeld einer solchen Variation.