| Name | Axiome | Homomorphismus | Unterobjekt |
|---|---|---|---|
| *Menge mit Verknüpfung* oder *Magma* | $X$ Menge<br>$*: X \times X \to X$ Abbildung | $\forall x, y \in X: \quad \phi(x * y) = \phi(x) \star \phi(y)$ | $\forall x, y \in U: \quad x * y \in U$ |
| *Halbgruppe* | $(X, *)$ Menge mit Verknüpfung<br>$\forall x, y, z \in X: (x*y)*z = x*(y*z)$ | $\forall x, y \in X: \quad \phi(x * y) = \phi(x) \star \phi(y)$ | $\forall x, y \in U: \quad x * y \in U$ |
| *Monoid* | $(X, *)$ Halbgruppe<br>$e \in X$<br>$\forall x \in X: x * e = x = e * x$ | $\forall x, y \in X: \quad \phi(x * y) = \phi(x) \star \phi(y)$<br>$\phi(e) = \tilde{e}$ | $\forall x, y \in U: \quad x * y \in U$<br>$e \in U$ |
| *Gruppe* | $(X, *, e)$ Monoid<br>$\forall x \in X: \exists x^{-1} \in X: x^{-1} * x = e$ | $\forall x, y \in X: \quad \phi(x * y) = \phi(x) \star \phi(y)$<br>$(\phi(e) = \tilde{e})$<br>$(\forall x \in X: \quad \phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1})$ | $U \neq \emptyset$<br>$\forall x, y \in U: \quad x * y \in U$<br>$\forall x \in U: \quad x^{-1} \in U$ |
| *abelsche Gruppe* | $(X, *, e)$ Gruppe<br>$\forall x, y \in X: x * y = y * x$ | $\forall x, y \in X: \quad \phi(x * y) = \phi(x) \star \phi(y)$<br>$(\phi(e) = \tilde{e})$<br>$(\forall x \in X: \quad \phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1})$ | $U \neq \emptyset$<br>$\forall x, y \in U: \quad x * y \in U$<br>$(e \in U)$<br>$\forall x \in U: \quad x^{-1} \in U$ |

| Name | Axiome | Homomorphismus | Unterobjekt |
|---|---|---|---|
| *Ring* | $(R,+,0)$ abelsche Gruppe<br>$(R,\cdot,1)$ Monoid<br>$\forall a,b,c \in R\colon (a+b)\cdot c = (a\cdot c)+(b\cdot c)$<br>$\forall a,b,c \in R\colon a\cdot(b+c) = (a\cdot b)+(a\cdot c)$ | $\forall a,b \in R\colon \quad \phi(a+b) = \phi(a)+\phi(b)$<br>$(\phi(0) = 0)$<br>$(\forall a \in R\colon \quad \phi(-a) = -\phi(a))$<br>$\forall a,b \in R\colon \quad \phi(a\cdot b) = \phi(a)\cdot\phi(b)$<br>$\phi(1) = 1$ | $\forall a,b \in U\colon \quad a+b \in U$<br>$(0 \in U)$<br>$\forall a \in U\colon \quad -a \in U$<br>$\forall a,b \in U\colon \quad a\cdot b \in U$<br>$1 \in U$ |
| *Schiefkörper* | $(K,+,0,\cdot,1)$ Ring<br>$\forall a \in K\setminus\{0\}\colon \exists a^{-1} : a^{-1}\cdot y = 1$ | $\forall a,b \in K\colon \quad \phi(a+b) = \phi(a)+\phi(b)$<br>$(\phi(0) = 0)$<br>$(\forall a \in K\colon \quad \phi(-a) = -\phi(a))$<br>$\forall a,b \in K\colon \quad \phi(a\cdot b) = \phi(a)\cdot\phi(b)$<br>$(\phi(1) = 1)$<br>$(\forall a \in K\colon \quad \phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1})$ | $U \neq \emptyset$<br>$\forall a,b \in U\colon \quad a+b \in U$<br>$(0 \in U)$<br>$\forall a \in U\colon \quad -a \in U$<br>$\forall a,b \in U\colon \quad a\cdot b \in U$<br>$(1 \in U)$<br>$\forall a \in U\colon \quad a^{-1} \in U$ |
| *Körper* | $(K,+,0,\cdot,1)$ Schiefkörper<br>$\forall a,b \in K\setminus\{0\}\colon a\cdot b = b\cdot a$ | $\forall a,b \in K\colon \quad \phi(a+b) = \phi(a)+\phi(b)$<br>$(\phi(0) = 0)$<br>$(\forall a \in K\colon \quad \phi(-a) = -\phi(a))$<br>$\forall a,b \in K\colon \quad \phi(a\cdot b) = \phi(a)\cdot\phi(b)$<br>$(\phi(1) = 1)$<br>$(\forall a \in K\colon \quad \phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1})$ | $U \neq \emptyset$<br>$\forall a,b \in U\colon \quad a+b \in U$<br>$(0 \in U)$<br>$\forall a \in U\colon \quad -a \in U$<br>$\forall a,b \in U\colon \quad a\cdot b \in U$<br>$(1 \in U)$<br>$\forall a \in U\colon \quad a^{-1} \in U$ |

| Name | Axiome | Homomorphismus | Unterobjekt |
| --- | --- | --- | --- |
| *K-Vektorraum* | $(V, +, 0)$ abelsche Gruppe<br>$\cdot : K \times V \to V$ Abbildung<br>$\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$<br>$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$<br>$\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$<br>$1 \cdot v = v$ | $\forall v, w \in V : \quad \phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w)$<br>$(\phi(0) = 0)$<br>$(\forall v \in V : \quad \phi(-v) = -\phi(v))$<br>$\forall v \in V, \lambda \in K : \quad \phi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \phi(v)$ | $U \neq \emptyset$<br>$\forall v, w \in U : \quad v + w \in U$<br>$(0 \in U)$<br>$(\forall v \in U : \quad -v \in U)$<br>$\forall v \in U, \lambda \in K : \quad \lambda \cdot v \in U$ |