

Elementare hyperbolische Geometrie

VON MAXIMILIAN GERHARDS

Version: 6. Mai 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Euklid und die axiomatische Methode	3
2	Absolute Geometrie: Punkte und Geraden	6
3	Absolute Geometrie: Halbebenen und Winkel	8
4	Absolute Geometrie: Kongruenz	14
5	Absolute Geometrie: Der Außenwinkelsatz und seine Konsequenzen	22
6	Die Suche nach dem Beweis des 5. Postulats	26
7	Der Hauptsatz der hyperbolischen Geometrie	35
8	Hyperparallelen	37
9	Grenzparallelen	42
10	Dreiecke	45
11	Dreiseite	51
12	Parallelitätswinkel	53
13	Kreise, Grenzkreise und Abstandslinien	56
14	Grenzkreisbögen	63

1 Euklid und die axiomatische Methode

Seit wann sich die Menschen für Zahlen, Berechnungen und tiefgehende mathematische Fragestellungen interessieren, ist nicht bekannt. Funde bereits aus prähistorischer Zeit machen klar, dass die Anfänge der Mathematik vor den Beginn schriftlicher Überlieferung fallen. Texte mit im moderneren Sinne mathematischem Inhalt sind uns aus allen frühen Hochkulturen überliefert: Mesopotamien (ab 1900 v. Chr.), Ägypten (Papyrus Rhind: um 1600 v. Chr.), Indien (Śulbasūtras: ab 800 v. Chr.).

Eine der offensichtlich von Anfang an wichtigsten Disziplinen war die Geometrie, von deren Hauptanwendungsgebieten eines ihr den Namen gab: Landvermessung (Griechisch *γεωμετρία* von *γῆ* 'Erde', *μέτρον* 'Maß'). In den erwähnten Texten finden sich Aussagen über die Flächeninhalte von Figuren wie Dreiecken und Kreisen ebenso wie Anwendungen des uns als „Satz des Pythagoras“ bekannten Zusammenhangs. Was jedoch aus moderner Sicht hier ebenso wie bei den sonstigen darin festgehaltenen mathematischen Beobachtungen fehlt, ist ein Aspekt, den wir für die Mathematik mittlerweile als unabdingbar betrachten: Der Beweis.

Zum ersten Mal taucht dieses Konzept nachweislich im antiken Griechenland des 6. Jahrhunderts v. Chr. auf. Thales von Milet (ca. 624 - 547 v. Chr.) gilt als der erste, der für eine Reihe von geometrischen Aussagen eine logische Begründung formulierte. Sein Vorgehen revolutionierte die Mathematik und die Wissenschaft als Ganzes: Während zuvor die Entdeckung einer Aussage oder eines Zusammenhangs bedeutete, dass diese intuitiv als richtig angesehen wurde, konnte seitdem nur das volle Gültigkeit beanspruchen, was sich mittels logischer Schlussfolgerungen aus bereits bekannten Sachverhalten herleiten lässt.

Es ist klar, dass auf diese Weise allerdings niemals alles Wissen bewiesen werden kann: Will man Zirkularität vermeiden, also einen Satz nicht auf einen anderen gründen, der selbst auf dem ersten aufbaut, so muss es mindestens eine Aussage geben, die keine weitere Begründung hat, also einfach akzeptiert werden muss: Ein *Axiom*. Im Prinzip kann man eine beliebige Aussage als Axiom verwenden, es bietet sich aber an, zwei Forderungen zu berücksichtigen:

Erstens sollte ein Axiom so einfach sein, dass man seine Gültigkeit auch ohne Beweis nicht in Frage stellen würde. Zweitens sollte, wenn man ein System aus mehreren Axiomen benutzen will oder muss, ein Axiom nicht aus den anderen Axiomen herleitbar sein (*Unabhängigkeit*).

Die Methode des Beweisens, die Thales ins Leben gerufen hatte, war von da an in Griechenland das Maß aller Beschäftigung mit Mathematik im Allgemeinen und Geometrie im Speziellen. Die philosophischen Schulen des Pythagoras von Samos (ca. 570 - 510 v. Chr.) und der Sophisten sind in dem Zusammenhang besonders hervorzuheben.

Es war schließlich Euklid von Alexandria (4.-3. Jhd. v. Chr.), der die Methode zu einer Blüte brachte. Sein wichtigstes Werk *Στοιχεῖα* (*Elemente*), in dem er die Gesamtheit der seinerzeit bekannten Sätze, inklusive vermutlich eigener Entdeckungen, der Geometrie und angrenzender Gebiete zusammentrug, beruhte vollständig darauf: Es begann mit einer Liste, in der alle später verwendeten Fachbegriffe erklärt (*definiert*) wurden, auf die zwei weitere Listen mit den von ihm zugrundegelegten Axiomen und Postulaten folgten. Die Postulate („Forderungen“) sind nach heutigem Sprachgebrauch ebenfalls Axiome. Die Unterscheidung bei Euklid richtet sich danach, ob sie Wahrheiten zum Ausdruck bringen, die von speziell geometrischer Natur (die Postulate) oder allgemeiner mathematisch-logischer Natur (die Axiome) sind. Die von den modernen Übersetzern und Herausgebern üblicherweise abgedruckte Liste ist die folgende:

Axiome:

1. Was dem selben Dinge gleich ist, ist einander gleich.
2. Fügt man zu Gleichem Gleiches hinzu, so sind die Summen gleich.
3. Nimmt man von Gleichem Gleiches hinweg, so sind die Reste gleich.
4. Was zur Deckung miteinander gebracht werden kann, ist einander gleich.
5. Das Ganze ist größer als sein Teil.

Postulate:

1. Es soll gefordert sein, dass sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse.
2. Ferner, dass sich eine begrenzte Gerade stetig in gerader Linie verlängern lasse.
3. Ferner, dass sich mit jedem Mittelpunkt und Halbmesser ein Kreis beschreiben lasse.
4. Ferner, dass alle rechten Winkel einander gleich seien.
5. Endlich, wenn eine Gerade zwei Geraden trifft und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte, so sollen die beiden Geraden, ins Unendliche verlängert, schließlich auf derselben Seite zusammentreffen, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei Rechte.

Ausgehend von diesen nur 10 Aussagen machte sich Euklid daran, das Wissen der (ebenen) Geometrie seiner Zeit Satz für Satz herzuleiten, angefangen mit der Aussage:

Man kann über jeder vorgegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck konstruieren.

bis hin zum bekannten Satz des Pythagoras:

Die Quadrate über den Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind zusammen so groß wie das Quadrat über der Hypotenuse.

und seiner Umkehrung:

Sind in einem Dreieck die Quadrate über zwei Seiten zusammen so groß wie das Quadrat über der letzten, so ist es rechtwinklig.

Dass Euklids „Elemente“ ein Meisterwerk darstellte, war schon den Zeitgenossen klar. Fast 2000 Jahre lang war es der Goldstandard eines wissenschaftlichen Werkes. An Schulen wurde Geometrie danach unterrichtet. Es wurde über die Jahrhunderte in Abschriften überliefert und seit der Erfindung des Buchdrucks in über 1000 Auflagen herausgegeben, mehr als jedes andere Buch außer der Bibel. Ohne Übertreibung kann man das Buch als das einflussreichste der Wissenschaftsgeschichte bezeichnen.

Dennoch gab es von Anfang an bei allem Lob auch einzelne kritische Bemerkungen. Erstaunlicherweise dauerte es auch die 2000 Jahre, bis die Entwicklung neuer wissenschaftlicher Standards deutlich machten, dass Euklid in einigen seiner Beweise eben doch mehr Annahmen machte, als er in seinen Axiomen und Postulaten explizit formulierte. Erst 1899 stellte David Hilbert (1862 - 1943) ein aus 15 Axiomen bestehendes Axiomensystem der

Geometrie zusammen, das logisch exakt und vollständig war.

Woran sich die Kritik tatsächlich entzündete, war eher das Gegenteil: Von Anfang an bestand der Verdacht, dass Euklids Axiomensystem eines *zu viel* umfasste, nämlich das 5. Postulat. Wer die obige Liste durchgeht, wird selbst verstehen, wodurch der Eindruck entstand: Im Gegensatz zu den anderen Axiomen (abgesehen vielleicht vom 4. Axiom, dessen Bedeutung ein wenig unklar ist) drückt es nicht eine Tatsache aus, die man als absolute Selbstverständlichkeit ansehen kann. Die ganze Formulierung klingt vielmehr nach einem Satz, der sich – unter Verwendung der restlichen Axiome – beweisen lassen müsste. Tatsächlich sieht man recht einfach, dass die zweite Hälfte des Postulats, nämlich die Aussage über die Lage des Schnittpunkts, beweisbar ist, wenn es tatsächlich einen Schnittpunkt gibt. Wenn aber das *gesamte* Postulat eigentlich als Satz beweisbar wäre, dann wäre es als Postulat, also unbewiesene Annahme, unnötig und damit überflüssig.

Zu diesem Verdacht der Überflüssigkeit trug Euklids eigenes Vorgehen beim Aufbau seines Werks nicht unerheblich bei: In den ersten 28 (und noch einmal im 31.) der 48 Sätze seines ersten Buches kommt er vollständig ohne das 5. Postulat aus. Erst für Satz 29, der für den Rest des Buches grundlegend ist, benutzt er es zum ersten Mal. Mehr noch: In Satz 26 führt er für zwei Kongruenzsätze, WSW und WWS, zwei getrennte Beweise, obwohl er mit Satz 32 (und damit dem 5. Postulat), der für jedes Dreieck die Winkelsumme 180° beweist, leicht den einen aus dem anderen hätte folgern können. Es wirkt ganz so, als ob Euklid selbst der Hoffnung anhing, er könnte die Geometrie ohne Verwendung des unschönen 5. Postulats aufbauen, und erst, als es ihm einfach nicht gelingen wollte, darauf zurückgriff. Ironischerweise ist genau dieser Schritt, der lange als der größte Makel des Werkes von Euklid angesehen wurde, im Rückblick eine seiner stärksten Leistungen. Er hätte, was ihm vermutlich wenige angekreidet hätten, einen leicht unsaubereren Beweis, in den er eine versteckte Zusatzannahme einfließen ließ, für die Aussage finden können. Er erkannte jedoch den Fehler und entschloss sich willentlich dafür, lieber sein Axiomensystem um eines zu erweitern, als einen unvollständigen Beweis abzuliefern. Und wie sich später zeigen sollte, war das Vorgehen nicht nur wissenschaftlich korrekt, sondern auch richtig: Die Aussage des 5. Postulats, so sehr sie auch wie ein Satz klingen mag, ist von den anderen Axiomen unabgänglich und damit auf ihrer Grundlage nicht beweisbar.

Die Sätze, die keine Folgerungen des 5. Postulats sind, werden unter dem Begriff *absolute* oder *neutrale Geometrie* zusammengefasst. Zusammen mit jenen bilden sie die *euklidische Geometrie*. Interessanterweise kann man feststellen, dass es in Hilberts Axiomatik eine parallele Unterscheidung gibt: Auch hier gibt es ein letztes Axiom, das *Parallelenaxiom*, das für genau die Sätze benötigt wird, die bei Euklid das 5. Postulat erforderten. Auch bei Hilbert bilden daher die 14 restlichen Axiome ein System der absoluten Geometrie.

Wir werden in diesem Kurs Euklids Vorgehen im Wesentlichen folgen und mit dem Aufbau der absoluten Geometrie beginnen. Anstelle seines als unvollständig erkannten Axiomensystems werden wir dabei natürlich ein zeitgemäheres verwenden. Während dagegen Hilberts 14 Axiome zweifellos eine vollständige Grundlage abgeben, machen sie den Einstieg etwas schwer. In den etwas mehr als 100 Jahren seitdem sind aber für verschiedene Anwendungen, z.B. der Schulmathematik, noch einige weitere Axiomensysteme entwickelt worden, aus denen wir uns bedienen können. Im Gegensatz zu Hilbert, dessen Anliegen es war, die Geometrie für sich zu axiomatisieren, greifen die meisten davon auf Konzepte außerhalb der Geometrie zurück, nämlich der naiven Mengenlehre und der reellen Zahlen, die selbstverständlich ihre eigenen Axiome erfordern, deren Resultate dann aber als bekannt vorausgesetzt werden. Ich habe mich daran orientiert und für den Kurs ein eigenes zusammengestellt, dessen Hauptvorteil seine Sparsamkeit ist: Es reichen bereits 4 Axiome (wenn ich keinen Fehler gemacht habe).

2 Absolute Geometrie: Punkte und Geraden

Das ganze Proseminar hindurch werden wir uns mit einer Menge, der *Ebene*, beschäftigen, deren Elemente die *Punkte* sind.

Axiom 1. *Es gibt mindestens zwei nichtleere Teilmengen der Ebene, genannt Geraden, mit der Eigenschaft, dass je zwei Punkte zu genau einer Geraden gehören.*

Definition 2.1. Sind A und B zwei verschiedene Punkte, so bezeichnen wir die eindeutige Gerade, zu der A und B gehören, mit AB .

Definition 2.2. Zwei Geraden g und h , die einen gemeinsamen Punkt haben, *schneiden sich* in diesem Punkt.

Lemma 2.3. *Zwei Geraden, die sich in einem Punkt schneiden, schneiden sich in keinem weiteren Punkt.*

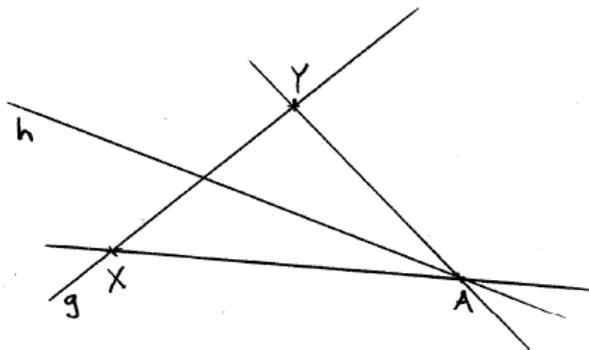
Definition 2.4. Eine Bijektion der Punkte einer Geraden auf die reellen Zahlen heißt eine *Parametrisierung* der Geraden.

Axiom 2. *Für jede Gerade gibt es eine Parametrisierung.*

Bemerkung 2.5. Es gibt also auf jeder Geraden so viele Punkte, wie es reelle Zahlen gibt, insbesondere gibt es unendlich viele Punkte in der Ebene.

Lemma 2.6. *Es gibt unendlich viele Geraden.*

Beweis.



Es gibt mindestens zwei Geraden. Sei g eine davon, h die andere. Es gibt auf h unendlich viele Punkte, von denen nach Lemma 2.3 höchstens einer auf g liegen kann. Sei A also einer der anderen.

Auf g gibt es unendlich viele Punkte X . Nach Axiom 1 gibt es für jeden davon eine Gerade AX , auf der er und A liegen. Diese Geraden sind alle verschieden, denn wäre für zwei verschiedene Punkte X und Y $AX = AY$, so wäre dies die nach Axiom 1 eindeutige Gerade XY . Dies ist aber g und A liegt nach Annahme nicht darauf. \square

Bemerkung 2.7. Ist $f : g \rightarrow \mathbb{R}$ eine Parametrisierung, so ist natürlich auch $f + c : P \mapsto f(P) + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$ eine Parametrisierung. Es gibt also trotz dem Axiom keinen ausgezeichneten Nullpunkt einer Geraden.

Außerdem ist auch $-f : P \mapsto -f(P)$ eine Parametrisierung, die Gerade hat also auch keine ausgezeichnete Richtung.

Definition 2.8. Sind A und B Punkte der Ebene, und $f : g \rightarrow \mathbb{R}$ die durch das Axiom geforderte Parametrisierung einer Geraden, auf der A und B liegen, so bezeichnen wir $d(A, B) := |f(B) - f(A)|$ als den *Abstand* der Punkte A und B .

Lemma 2.9. Die Abstandsfunktion ist wohldefiniert.

Sie ist symmetrisch, d.h. $d(A, B) = d(B, A)$.

Es gilt weiter:

$$d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

Beweis. Dass die Abstandsfunktion nicht von der Wahl der Geraden abhängt, liegt daran, dass wir nur dann überhaupt eine Wahl haben, wenn die beiden Punkte gleich sind. In diesem Fall ist offensichtlich $|f(B) - f(A)| = 0$ unabhängig von der Wahl von g .

Die anderen beiden Aussagen folgen sofort aus den Eigenschaften der Betragsfunktion auf den reellen Zahlen unter Verwendung der Bijektivität von f . \square

Bemerkung 2.10. Die Abstandsfunktion ist unverändert, wenn wir die Parametrisierung f durch $f + c$ ($c \in \mathbb{R}$) oder $-f$ ersetzen.

Bemerkung 2.11. Wenn im folgenden von einer Parametrisierung einer Geraden die Rede ist, dann nur von einer, die denselben Abstand auf der Geraden definiert wie die durch Axiom 2 geforderte.

Bemerkung 2.12. Einige Autoren fordern in einem Axiom für die Abstandsfunktion gleich schon die Dreiecksungleichung, mit der sie dann alle Eigenschaften einer Metrik erfüllt. Ich folge dagegen lieber Euklid und beweise sie als Satz, wenn ich die restlichen Axiome zur Verfügung habe.

Definition 2.13. Ein Punkt B ist *zwischen* zwei anderen Punkten A und C , in Zeichen $\langle ABC \rangle$ oder $\langle CBA \rangle$, wenn A , B und C auf einer Geraden liegen und die reelle Zahl $f(B)$ zwischen $f(A)$ und $f(C)$ liegt oder äquivalent $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$.

Definition 2.14. Seien A und B verschiedene Punkte.

Die *offene Strecke* zwischen A und B ist die Menge

$$S]AB[:= \{X | \langle AXB \rangle\}.$$

Die *abgeschlossene Strecke* A und B ist die Menge

$$S[AB] := S]AB[\cup \{A\} \cup \{B\}.$$

A und B nennen wir in beiden Fällen die *Enden* der Strecke.

Die *offene Halbgerade* oder der *offene Strahl* von A durch B ist die Menge

$$H]AB[:= S]AB[\cup \{B\} \cup \{X | \langle ABX \rangle\}.$$

Die *abgeschlossene Halbgerade* oder der *abgeschlossene Strahl* von A durch B ist die Menge

$$H[AB[:= H]AB[\cup \{A\}.$$

A nennen wir in beiden Fällen den *Anfang* oder *Ausgangspunkt* der Halbgeraden.

Bemerkung 2.15. Wir werden alle diese Mengen oft einfach als AB abkürzen und im Kontext klar machen, was gemeint ist, insbesondere wenn wir nicht unterscheiden wollen, ob eine Strecke oder Halbgerade offen oder abgeschlossen ist.

Bemerkung 2.16. Wenn wir als Parametrisierung $f_A = f + c_A$ der Geraden AB diejenige wählen, die $f_A(A) = 0$ erfüllt, so lassen sich die Halbgeraden darstellen als Mengen

$$H]AB[= \{X \mid \text{sgn}(f_A(B))f_A(X) > 0\} \quad \text{und}$$

$$H[AB[= \{X \mid \text{sgn}(f_A(B))f_A(X) \geq 0\}.$$

Man sieht dann sofort: Ist AB eine Gerade, so ist die Menge $AB \setminus H[AB[$ selbst eine offene Halbgerade und $AB \setminus H]AB[$ eine abgeschlossene Halbgerade. Wir nennen sie die *gegenüberliegenden Halbgeraden* und schreiben sie $H]AB[^-$ bzw. $H[AB[^-$ (Achtung mit der Klammerung!).

3 Absolute Geometrie: Halbebenen und Winkel

Definition 3.1. Eine Teilmenge M der Ebene heißt *konvex*, wenn für alle Punkte $A, B \in M$ gilt:

$$S[A, B] \subseteq M.$$

Axiom 3. Zu jeder Gerade g gibt es drei Teilmengen M_1, g und M_2 der Ebene mit den Eigenschaften:

1. Die Teilmengen M_i sind konvex.
2. Jeder Punkt der Ebene liegt in genau einer der drei Mengen.
3. $X \in M_1 \wedge Y \in M_2 \Rightarrow S]XY[\cap g \neq \emptyset$.

Bemerkung 3.2. Da es außerhalb der Geraden g Punkte gibt, ist mindestens eine der beiden Teilmengen M_i nicht leer.

Definition 3.3. Wir nennen M_1 und M_2 die (*offenen*) *Halbebenen* mit Rand g .

Ist $g = AB$ eine Gerade und C ein Punkt in einer der beiden Halbebenen, so bezeichnen wir diese mit $H]g, C[$ oder $H]ABC[$, die andere mit $H]g, C[^-$ oder $H]ABC[^-$.

Bemerkung 3.4. Die Konvexität der Mengen M_i und die Eigenschaft (3) lassen sich auch zusammenfassen als

$$X \in M_i \wedge Y \in M_i \Leftrightarrow S[XY] \cap g = \emptyset.$$

Lemma 3.5. Sei eine Gerade g gegeben. Ist A ein Punkt auf g und B ein Punkt außerhalb von g , so ist $H]AB[\subseteq H]gB[$ und $H]AB[^- \subseteq H]gB[^-$.

Insbesondere ist keine Halbebene leer.

Beweis. Sei $X \in H]AB[$ beliebig. Wir unterscheiden drei Fälle:

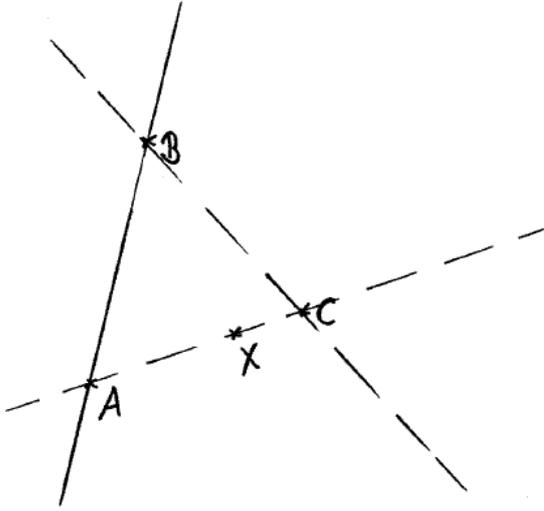
$\langle AXB \rangle$: Es ist klar, dass $X \notin g$, da $X \neq A$ und $B \in AX$, aber nach Voraussetzung $B \notin g$. Es ist auch nicht $X \in H]gB[^-$, da sonst $S]XB[\cap g \neq \emptyset$. Die Gerade XB schneidet die Gerade g aber bereits in A und kann damit nicht auch noch zwischen X und B schneiden. $X = B$: klar.

$\langle ABX \rangle$: Wieder ist $X \in g$ ausgeschlossen. Wäre $X \in H]gB[^-$, so wäre nach dem Argument im ersten Fall $B \in H]gX[= H]gB[^-$ im Widerspruch zur Definition.

Sei nun $X \in H]AB[^-$. Man sieht mit der Parametrisierung der Geraden AB , dass $\langle XAB \rangle$, also $S[XB] \cap g \supseteq \{A\} \neq \emptyset$. Da X selbst wieder nicht auf g liegen kann, müssen nach Bemerkung 3.4 X und B in verschiedenen Halbebenen liegen. \square

Korollar 3.6. Keine Halbebene ist Teilmenge einer Geraden.

Beweis.



Sei AB eine Gerade, die eine Halbebene $H]ABC[$ definiert. Sei X ein Punkt aus $H]AC[$. Nach dem vorhergehenden Lemma ist $X \in H]ABC[$. Wäre $H]ABC[$ Teilmenge einer Geraden, dann auf der durch X und C , also der Geraden AC .

Genauso können wir aber zeigen, dass $H]ABC[$ Teilmenge der Geraden BC sein müsste. Das hieße also $H]ABC[= AC \cap BC = \{C\}$. Wir haben aber schon einen Punkt X gesehen, der von C verschieden ist und in $H]ABC[$ liegt. Widerspruch! \square

Definition 3.7. Die Vereinigung zweier abgeschlossener Halbgeraden $H[AB[$ und $H[AC[$ mit gemeinsamem Ausgangspunkt A nennen wir den *Winkel* $\angle BAC$ oder $\angle CAB$.

Bilden die beiden Halbgeraden eine Gerade, so nennen wir den Winkel einen *gestreckten*. Andernfalls definieren wir als das *Innere* $\text{In}(\angle BAC)$ des Winkels den Schnitt der beiden offenen Halbebenen $H]ABC[$ und $H]ACB[$.

Bemerkung 3.8. Treffen sich zwei Geraden in einem Punkt A , so bilden sie vier Winkel. Jeder Punkt, der nicht auf einer der Geraden liegt, liegt im Inneren eines dieser Winkel. Wir nennen die Winkel mit einer gemeinsamen Halbgeraden *Nebenwinkel*, die ohne *Scheitelwinkel*.

Definition 3.9. Sind A , B und C drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so nennen wir die Menge

$$\Delta ABC := S[AB] \cup S[BC] \cup S[CA]$$

das *Dreieck* mit den Ecken A , B und C .

Die Strecken AB , BC und CA sind die *Seiten*, die Winkel $\angle ABC$, $\angle BCA$ und $\angle CAB$ die *Winkel* des Dreiecks.

Das *Innere* des Dreiecks ist der Schnitt der drei offenen Halbebenen $H]ABC[$, $H]BCA[$ und $H]CAB[$.

Bemerkung 3.10. Wir werden das Dreieck oft mit ABC abkürzen.

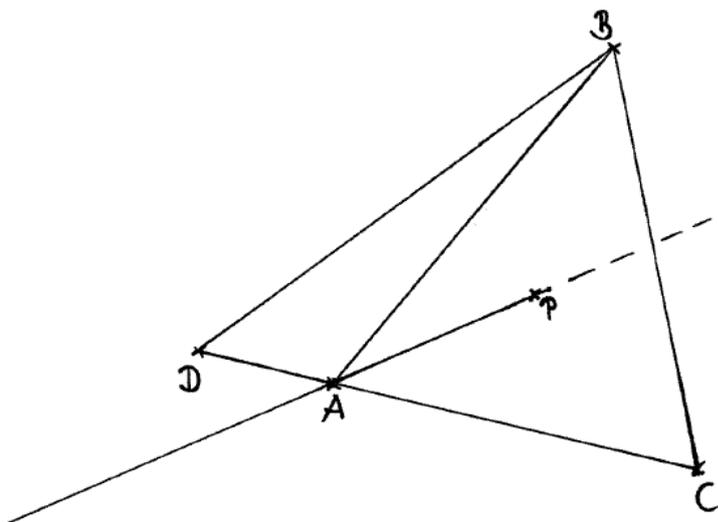
Satz 3.11 (Satz von Pasch). 1. Eine Gerade, die ein Dreieck schneidet, schneidet mindestens zwei Seiten des Dreiecks.

2. Eine Halbgerade von einer Ecke des Dreiecks durch einen Punkt im Inneren schneidet die dritte Seite des Dreiecks und keine weitere Ecke.
3. Eine Gerade, die einen Punkt im Inneren des Dreiecks enthält, schneidet das Dreieck in genau zwei Punkten.

Bemerkung 3.12. Die erste Aussage des Satzes wird auch als *Axiom von Pasch* bezeichnet. Man kann sie nämlich anstelle unseres Axioms 3 fordern und dann jenes als Satz davon ableiten.

Beweis. 1. Sei g die Gerade. Sie schneide $\triangle ABC$ oBdA in $S[AB]$. Es gibt nun zwei Fälle zu unterscheiden:
 Liegt einer der beiden Punkte, oBdA A , auf der Geraden g , so schneidet g auch die jeweils andere Seite, die dieser Punkt definiert, in unserem Fall also $S[CA]$.
 Liegt keiner der beiden Punkte auf g , so liegen sie wegen der Konvexität der Halbebenen in verschiedenen. C kann also nicht mit beiden in derselben Halbebene liegen. Eine der beiden Strecken $S[BC]$ oder $S[AC]$ muss also g schneiden.

2.



Sei oBdA A die Ecke, P der Punkt. Zu zeigen ist, dass $H]AP[\cap S]BC[\neq \emptyset$.

Wir nehmen dazu einen Punkt D mit $\langle DAC \rangle$ und wenden die erste Aussage auf das neue Dreieck $\triangle DBC$ an (es ist ein Dreieck, da B nicht auf der Geraden $DC = AC$ liegen kann). Da AP die Seite $S[DC]$ in A schneidet, muss es mindestens eine der anderen beiden Seiten schneiden. Wir schließen zunächst aus, dass der Schnittpunkt in $H]AP[^-$ liegt:

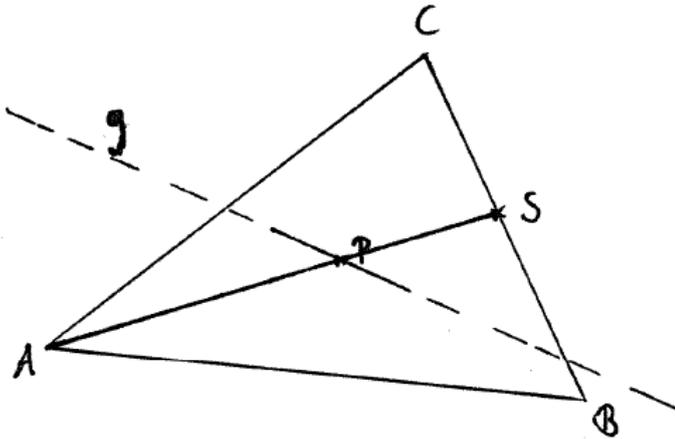
A kann der Schnittpunkt nicht sein: Wäre nämlich A auf $S[BC]$, so wären die drei Punkte auf einer Geraden im Widerspruch zur Definition eines Dreiecks. Wäre andererseits A auf $S[BD]$, so wäre $B \in AD = AC$, also wären wieder alle drei Punkte auf einer Geraden.

Es ist aber $H]AP[^- \subset H]ACB[^- = H]DCB[^-$ nach Lemma 3.5 und $S[DB], S[CB] \subset H]DCB[\cup DC$, also kann es keinen Schnittpunkt von $H]AP[^-$ und einer der Dreiecksseiten geben.

Der Schnittpunkt liegt also tatsächlich auf der Halbgeraden $H]AP[$. Es ist aber $D \in H]AC[^- \subseteq H]ABC[^-$, also $H[BD] \subset H]ABC[^- \cup AB$ nach Lemma 3.5,

während $H]AP[\subset H]ABC[$, also muss der Schnittpunkt auf der Strecke $S]BC[$ liegen. Dass der Schnittpunkt nicht C sein kann, liegt entsprechend daran, dass $P \in H]ACB[$, also auch $H]AP[\subset H]ACB[$.

3.



Sei P der Punkt im Inneren des Dreiecks, g die Gerade. Geht die Gerade g durch eine Ecke, schneidet sie die dritte Seite. Damit schneidet sie alle drei Seiten und kann keine ein weiteres Mal schneiden, wir erhalten also genau zwei Schnittpunkte.

Geht die Gerade g durch keine Ecke, so bilde die Gerade AP . Diese schneidet die Strecke $S]BC[$ in einem Punkt S . Die Gerade g schneidet also sowohl das Dreieck $\triangle ASC$ als auch das Dreieck $\triangle ASB$, muss also in beiden Dreiecken noch mindestens eine weitere Seite schneiden. Die Schnittpunkte können nicht auch auf AS liegen, da $g \neq AP = AS$, sind also verschieden.

Es können aber auch nicht mehr als zwei sein: g kann nämlich jede Seite nur einmal schneiden. Würde es aber alle drei schneiden, so wären alle drei Punkte auf verschiedenen Seiten davon, was natürlich nicht möglich ist.

□

Definition 3.13. Wir sagen, ein Strahl s liege *zwischen* zwei anderen Strahlen r und t , wenn sie einen gemeinsamen Anfang haben, r und t einen nicht gestreckten Winkel bilden und der offene Strahl s im Inneren des Winkels liegt.

Lemma 3.14. Sei AC eine Gerade. Liegen zwei Punkte B und D auf verschiedenen Seiten der Gerade und nicht auf einer Geraden mit A , so liegt einer der Strahlen $H]AC[$ oder $H]AC[^-$ zwischen den Strahlen $H]AB[$ und $H]AD[$.

Beweis. Da B und D auf verschiedenen Seiten der Gerade AC liegen, gibt es einen Schnittpunkt $S := S]BD[\cap AC$. Mit zweimaliger Anwendung von Lemma 3.5 erhalten wir $S \in \text{In}(\angle BAD)$ und mit weiteren zweimal, dass $H]AS[\subseteq \text{In}(\angle BAD)$, also $H]AS[$ zwischen $H]AB[$ und $H]AD[$. $H]AS[$ ist aber entweder $H]AC[$ oder $H]AC[^-$. □

Lemma 3.15. Liegt ein Strahl AC zwischen zwei anderen Strahlen AB und AD , so gibt es einen Schnittpunkt von $H]AC[$ und $S]BD[$. Insbesondere liegen B und D auf verschiedenen Seiten von AC .

Beweis. Es gibt drei Fälle zu unterscheiden:

$C \in BD$: Dann liegt C auf $S]BD[$ und $S]BD[$ schneidet die Halbgerade $H]AC[$ in C .

$C \in H]BDA[$: Dann gibt es einen Schnittpunkt von $S]AC[$ mit BD , und zwar auf $S]BD[$.

$C \in H]BDA[$: Dann liegt C im Inneren des Dreiecks $\triangle ABD$ und wir nutzen die zweite Aussage des Satzes von Pasch, um den Schnittpunkt von $H]AC[$ mit $S]BD[$ zu finden.

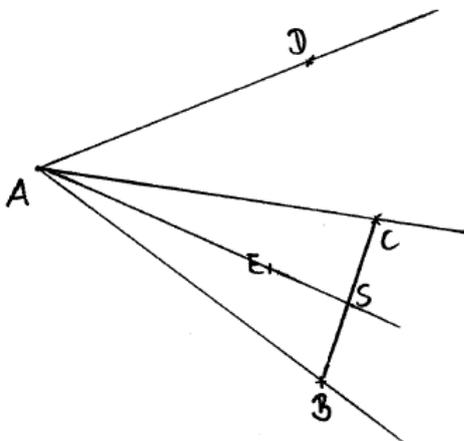
In jedem Fall ist $S]BD[\cap AC \neq \emptyset$, also liegen B und D auf verschiedenen Seiten. \square

Lemma 3.16. *Liegt ein Strahl AC zwischen zwei anderen Strahlen AB und AD , so bilden AB und AC wie auch AC und AD nicht gestreckte Winkel und*

$$\text{In}(\angle BAD) = \text{In}(\angle BAC) \uplus H]AC[\uplus \text{In}(\angle CAD).$$

Bemerkung 3.17. Wir schreiben in diesem Fall $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD$.

Beweis.



Dass die Winkel nicht gestreckt sind, ist klar, da C nach Definition des Winkelinneren nicht auf AB oder AD liegt.

Für die Zerlegungsaussage bemerken wir zunächst, dass B und C auf derselben Seite von AD liegen. Sei E ein beliebiger Punkt von $\text{In}(\angle BAC)$. Wir wollen zeigen, dass auch E in $H]ADB[$ liegt. Nach Lemma 3.15 gibt es einen Schnittpunkt S von $H]AE[$ und $S]BC[$. Wegen der Konvexität der Halbebenen liegt dieser in $H]ADB[$. Mit Lemma 3.5 ist dann auch die ganze Halbgerade $H]AS[$, insbesondere E , in $H]ADB[$.

Es folgt also: $H]ABC[\cap H]ACB[= \text{In}(\angle BAC) \subseteq H]ADB[$. Wegen $H]ABC[= H]ABD[$ folgt $\text{In}(\angle BAC) \subseteq \text{In}(\angle BAD)$. Genau analog zeigt man $\text{In}(\angle CAD) \subseteq \text{In}(\angle BAD)$.

Jetzt zerlegen wir das Winkelinnere $\text{In}(\angle BAD)$ entlang der Geraden AC und beachten, dass B und D auf verschiedenen Seiten liegen:

$$\begin{aligned} \text{In}(\angle BAD) &= \text{In}(\angle BAD) \cap (H]ACB[\uplus AC \uplus H]ACD[) \\ &= (H]ADB[\cap H]ABD[\cap H]ACB[) \\ &\quad \uplus (H]ADB[\cap H]ABD[\cap AC) \\ &\quad \uplus (H]ABD[\cap H]ADB[\cap H]ACD[) \\ &= (H]ADB[\cap H]ABC[\cap H]ACB[) \\ &\quad \uplus (H]ADC[\cap H]ABC[\cap AC) \\ &\quad \uplus (H]ABD[\cap H]ADC[\cap H]ACD[) \\ &= \text{In}(\angle BAC) \uplus H]AC[\uplus \text{In}(\angle CAD) \end{aligned}$$

□

Korollar 3.18. Sei $\angle BAC$ gegeben. Dann gibt es eine Bijektion zwischen den offenen oder abgeschlossenen Halbgeraden zwischen $H]AB[$ und $H]AC[$ und den Punkten der Strecke $S]BC[$.

Genau dann liegt eine Halbgerade zwischen zwei anderen, wenn ihr Punkt zwischen den Punkten der anderen beiden liegt.

Beweis. Lemma 3.15 liefert uns die Abbildung, die jedem Strahl seinen Schnittpunkt mit der Strecke $S]BC[$ zuordnet. Umgekehrt können wir jedem Punkt S auf der Strecke natürlich die Halbgerade AS zuordnen.

Mit dieser Bijektion können wir also für jeden Strahl AP zwischen AB und AC oBdA $P \in S]BC[$ annehmen.

Ist P ein Punkt mit $\langle CPB \rangle$, so ist $P \in H]BC[\subset H]ABC[$ und $P \in H]CB[\subset H]ACB[$, also ist $P \in \text{In}(\angle BAC)$ und somit auch $H]AP[\subset \text{In}(\angle BAC)$, also liegt der Strahl AP zwischen den Strahlen AB und AC .

Ist andererseits AP ein Strahl zwischen den Strahlen AB und AC mit $P \in S]BC[$, so ist nach Definition der Strecke $\langle BPC \rangle$.

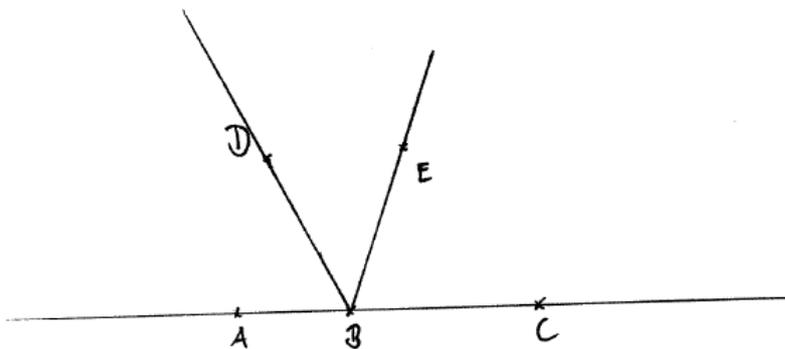
Da nach Lemma 3.17 die beiden Winkel $\angle BAP$ und $\angle PAC$ wieder nicht gestreckt sind, können wir das Resultat mit unvollständiger Induktion auf den Fall mehrerer Punkte P , Q und R auf der Strecke $S]BC[$ übertragen. □

Korollar 3.19. Von drei Strahlen kann höchstens einer zwischen den anderen beiden liegen.

Beweis. Von zwei Mengen kann höchstens eine eine echte Teilmenge einer anderen sein. Damit folgt die Aussage aus der Winkelzerlegung. □

Korollar 3.20. Sei AC eine Gerade und $\langle ABC \rangle$. Wenn zwei Punkte D und E auf einer Seite von AC liegen und nicht auf einer Geraden mit B , so ist von den Halbgeraden $H]BD[$ und $H]BE[$ stets genau eine zwischen der anderen und $H]BC[$; die andere liegt zwischen dieser und $H]BA[$.

Beweis.



Betrachte die Gerade BD . Die Punkte A und C liegen auf verschiedenen Seiten von BD , also liegt E mit einem der beiden, oBdA C , in derselben Halbebene. Dann ist $E \in \text{In}(\angle CBD)$, also $H]BE[$ zwischen $H]BD[$ und $H]BC[$. Es kann dann also nicht auch $H]BD[$ zwischen $H]BE[$ und $H]BC[$ liegen.

Es folgt nun aber, dass $D \notin H]BEC[$, also $D \in H]BEA[$ und damit $H]BD[$ zwischen $H]BE[$ und $H]BA[$. \square

Mit diesen Aussagen können wir alle Halbgeraden mit einem festen Ausgangspunkt anordnen. Das wird uns die Möglichkeit geben, das Winkelmaß festzulegen, ohne dafür ein weiteres Axiom anzusetzen. Ein letztes benötigen wir allerdings noch und dafür ein wichtiges Konzept.

4 Absolute Geometrie: Kongruenz

Definition 4.1. Eine *Bewegung* oder *Kongruenzabbildung* Γ ist eine Abbildung der Ebene auf sich selbst, die Geraden auf Geraden abbildet und eine Isometrie ist, also $d(\Gamma(A), \Gamma(B)) = d(A, B)$ für alle A und B erfüllt.

Bemerkung 4.2. Aus der Isometrie-eigenschaft folgt sofort, dass jede Kongruenzabbildung injektiv ist.

Außerdem folgert man daraus leicht, dass

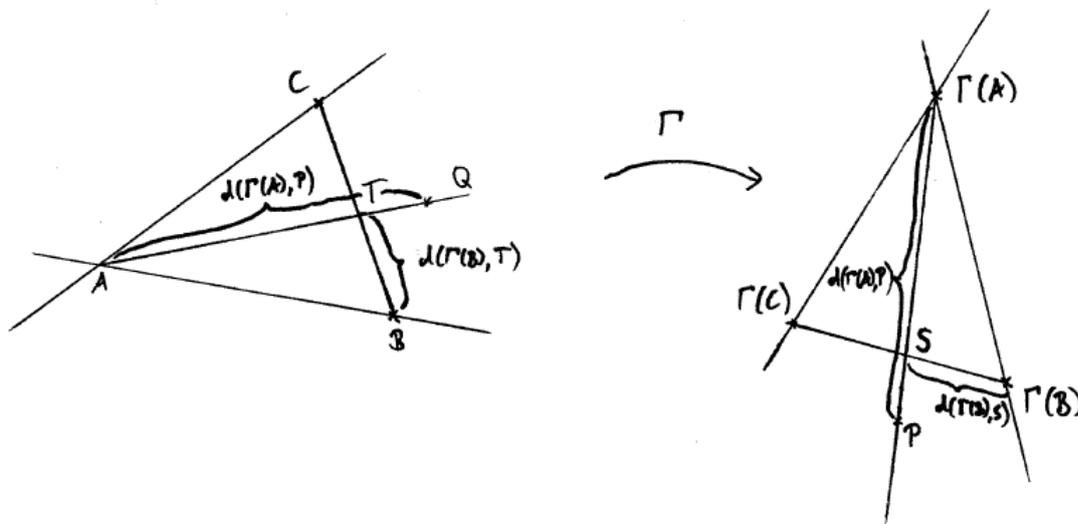
$$\langle \Gamma(A)\Gamma(B)\Gamma(C) \rangle \Leftrightarrow \langle ABC \rangle$$

und somit auch Strecken auf Strecken und Halbgeraden auf Halbgeraden abgebildet werden. Da auch die Schnittrelation erhalten bleibt – Bilder von Figuren schneiden sich genau dann, wenn sich die Figuren selbst schneiden – werden auch Halbebenen auf Halbebenen abgebildet und das Innere von Winkeln oder Dreiecken auf das Innere der Bilder. Wir können jetzt die Bijektivität von Bewegungen zeigen:

Lemma 4.3. *Bewegungen sind bijektiv.*

Beweis. Die Injektivität haben wir bereits gesehen.

Sei P ein beliebiger Punkt. Wir wollen sein (eindeutiges) Urbild bestimmen.



Wähle dazu eine beliebige Gerade AB und ein Punkt C , der nicht darauf liegt. Die Bildgeraden $\Gamma(A)\Gamma(B)$ und $\Gamma(A)\Gamma(C)$ sind wegen der Injektivität verschieden und treffen sich in Punkt $\Gamma(A)$, bilden also vier Winkel. Es gibt jetzt zwei Fälle:

P liegt auf einer der Bildgeraden. Dann sind wir fertig, denn dann ist P im Bild.

P liegt nicht auf einer der Bildgeraden. Dann liegt P in einem der vier Winkelinneren, oBdA $\text{In}(\angle\Gamma(B)\Gamma(A)\Gamma(C))$. Nach Lemma 3.15 schneidet die Halbgerade $H]\Gamma(A)P[$ die Strecke $S]\Gamma(B)\Gamma(C)[$ in einem Punkt S . S liegt auf der Geraden $\Gamma(B)\Gamma(C)$, die das Bild der Geraden BC ist, hat also ein Urbild T , und zwar den Punkt mit $d(B, T) = d(\Gamma(B), S)$ und $d(C, T) = d(\Gamma(C), S)$. Jetzt liegt P auf der Geraden $\Gamma(A)S$, die das Bild der Geraden AT ist. Damit hat P ein Urbild, und zwar den Punkt Q mit $d(A, Q) = d(\Gamma(A), P)$ und $d(T, Q) = d(S, P)$. \square

Bemerkung 4.4. Die Umkehrabbildung einer Bewegung ist offensichtlich wieder eine Bewegung. Ebenso ist die Verknüpfung zweier Bewegungen wieder eine Bewegung.

Axiom 4. Zu je zwei abgeschlossenen Halbgeraden $H[AB[$ und $H[CD[$ gibt es genau zwei Bewegungen, die $H[AB[$ auf $H[CD[$ abbilden. Eine Halbebene bezüglich AB wird unter diesen beiden Bewegungen auf verschiedene Halbebenen bezüglich CD abgebildet.

Lemma 4.5. 1. Ist Γ eine Bewegung, die einen Strahl auf sich selbst überführt, so ist $\Gamma \circ \Gamma = \text{id}$.

2. Eine Bewegung, die zwei nicht kollineare Strahlen je auf sich selbst überführt, ist die Identität.

Beweis. 1. Sei AB der Strahl, $H]ABC[$ eine Halbebene. Es gibt zwei Möglichkeiten:
Ist $\Gamma(H]ABC[) = H]ABC[$, so auch $(\Gamma \circ \Gamma)(H]ABC[) = H]ABC[$.
Ist $\Gamma(H]ABC[) = H]ABC[-$, so ist $(\Gamma \circ \Gamma)(H]ABC[) = \Gamma(H]ABC[-) = H]ABC[$.
In beiden Fällen haben wir eine Bewegung, die den Strahl festhält und eine Halbebene auf sich selbst überführt. Die Identität tut dasselbe. Da nach Axiom 4 genau eine Bewegung existiert, die das tut, müssen die beiden Bewegungen dieselbe sein.

2. Klar mit dem letzten Argument. \square

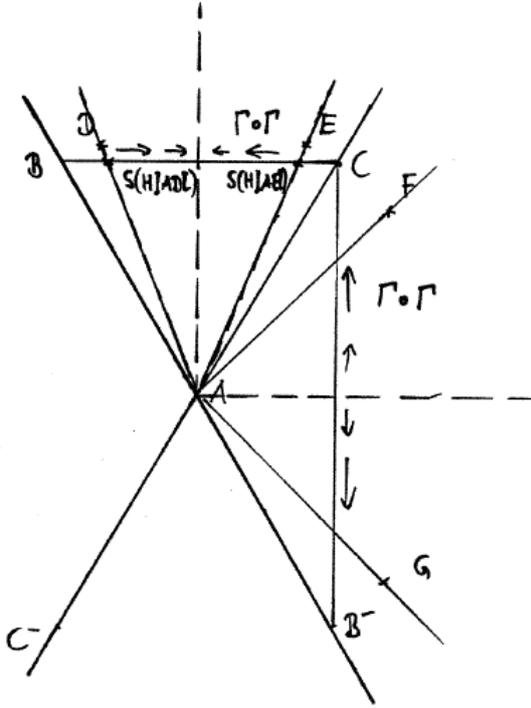
Die Existenz der Bewegungen gibt uns trivialerweise die Möglichkeit, an einem beliebigen Strahl eine Strecke festgelegter Länge abzutragen.

Ebenso gibt sie uns die Möglichkeit, an einen beliebigen Strahl Winkel anzutragen, die kongruent zu einem vorgegebenen sind, und zwar in beide Richtungen genau einen. Die Existenz ist dabei einfach (Ist $\angle BAC$ der Winkel und $H[PQ[$ der Strahl, so verwende die Bewegung, die $H[AB[$ auf $H[PQ[$ abbildet und $H]BAC[$ auf die vorgegebene Halbebene. Das Bild von $H[AC[$ ist dann der zweite Schenkel des Winkels.), die Eindeutigkeit meiner Ansicht nach überhaupt nicht. Sie erfordert nämlich, dass wir durch etwas, was wir anschaulich gerne als „Spiegeln“ eines Winkels ansehen würden, nicht seine Größe ändern. Das zeige ich in dem folgenden Satz:

Satz 4.6. Sei $\angle BAC$ ein Winkel. Die Bewegung, die einen Schenkel $H[AB[$ auf den anderen abbildet sowie $H]ABC[$ auf $H]ACB[$, bildet auch $H[AC[$ auf $H[AB[$ ab.

Beweis. Sei Γ die Bewegung. Wir wollen zeigen, dass $\Gamma \circ \Gamma$ zwei Strahlen festhält, denn dann ist $\Gamma \circ \Gamma = \text{id}$, also $\Gamma(H[AC[) = \Gamma^{-1}(H[AC[) = H[AB[$. Da der Winkel sich nicht verändert, wenn wir andere Punkte auf den Schenkeln wählen, können wir zur Vereinfachung annehmen, dass $d(A, B) = d(A, C)$, denn dann ist $\Gamma(B) = C$.

Sei zu einem beliebigem Punkt P der Punkt P^- derjenige mit $\langle PAP^- \rangle$ und $d(P^-, A) = d(P, A)$. Wir wissen bereits, dass die Geraden AB und AC den Rest der Ebene in die vier Winkel $\angle BAC$, $\angle BAC^-$, $\angle B^-AC$ und $\angle B^-AC^-$ teilen. Wenn $\Gamma(C) \in \Gamma(H]ABC[) =$



$H]ACB[$ nicht auf $H]AB[$ liegt, muss es in $\text{In}(\angle BAC)$ oder $\text{In}(\angle BAC^-)$ liegen. Wir betrachten zunächst den Fall $D := (\Gamma \circ \Gamma)(B) = \Gamma(C) \in \text{In}(\angle BAC)$. Weil Winkelinnere auf Winkelinnere abgebildet werden, ist dann $E := (\Gamma \circ \Gamma)(C) = \Gamma(D) \in \text{In}(\angle \Gamma(B)\Gamma(A)\Gamma(C)) = \text{In}(\angle CAD) \subset \text{In}(\angle BAC)$, also

$$(\Gamma \circ \Gamma)(\text{In}(\angle BAC)) \subset \text{In}(\angle BAC).$$

Unter $\Gamma \circ \Gamma$ müsste dann der Winkel $\angle BAC$ auf den echt schmaleren Winkel $\angle DAC$ abgebildet werden. Das klingt anschaulich nach einem Widerspruch zu dem Konzept einer Kongruenzabbildung, so einfach ist es aber nicht. Wir nutzen jetzt aber das Korollar 3.18, um zu jeder Halbgeraden $H]AP[$ aus $\text{In}(\angle BAC)$ den eindeutigen Schnittpunkt $S(H]AP[) \in S]BC[$ zu finden. Mit der passenden Parametrisierung f_B der Geraden BC erhalten wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} f_B \circ S : \{H]AP[\subset \text{In}(\angle BAC)\} &\rightarrow [0, d(B, C)] \subset \mathbb{R} \\ H]AP[&\mapsto f_B(S(H]AP[)) = d(B, S(H]AP[)) \end{aligned}$$

Diese ist nach Konstruktion bijektiv, und eine Halbgerade liegt genau dann zwischen zwei anderen, wenn ihr Funktionswert zwischen den Funktionswerten der anderen liegt.

Nun ist $\Gamma \circ \Gamma$ eine Bewegung und erhält damit die „zwischen“-Beziehung von Halbgeraden. Das bedeutet, dass $(f_B \circ S)^{-1}(\Gamma \circ \Gamma)(f_B \circ S)$ eine monoton wachsende Funktion auf dem Intervall $[0, d(B, C)]$ ist. Eine solche besitzt aber einen Fixpunkt, wir haben also eine Halbgerade, die unter $\Gamma \circ \Gamma$ auf sich selbst abgebildet wird.

Um eine zweite zu finden, betrachte $F := \Gamma^{-1}(B) \in \Gamma^{-1}(H]ACB[) = H]ABC[$. Da $\Gamma(\text{In}(\angle BAC)) \subseteq \text{In}(\angle BAC)$, muss F außerhalb des Winkels $\angle BAC$ liegen, also $F \in \text{In}(\angle B^-AC)$. Sei schließlich $G := (\Gamma^{-1} \circ \Gamma^{-1})(B^-)$. Weil Bewegungen Geraden auf Geraden abbilden und Abstände festhalten, gilt offensichtlich $(\Gamma^{-1} \circ \Gamma^{-1})(B^-) = (\Gamma^{-1} \circ \Gamma^{-1})(B)^- = \Gamma^{-1}(F)^-$ und wie eben folgt aus $\Gamma(\text{In}(\angle FAB)) = \text{In}(\angle BAC)$, dass $\Gamma^{-1}(F) \in \text{In}(\angle BAC^-)$, also $G \in \text{In}(\angle B^-AC)$. Zusammengenommen erhalten wir, dass

$$(\Gamma^{-1} \circ \Gamma^{-1})(\text{In}(\angle B^-AC)) \subset \text{In}(\angle B^-AC).$$

Mit dem Vorgehen wie vorhin finden wir eine Halbgerade in $\text{In}(\angle B^-AC)$, die unter $\Gamma^{-1} \circ \Gamma^{-1}$ auf sich selbst abgebildet wird. Diese wird aber dann natürlich auch unter $\Gamma \circ \Gamma$ auf sich selbst abgebildet.

Damit haben wir die beiden Halbgeraden gefunden und $\Gamma \circ \Gamma = \text{id}$ wie gewünscht.

Der Fall $D := (\Gamma \circ \Gamma)(B) = \Gamma(C) \in \text{In}(\angle BAC^-)$ ist dann einfach: Wie eben können wir zeigen, dass dann $\Gamma^{-1}(B) \in \text{In}(\angle BAC)$ gelten müsste. Wir können dann die Aussage des Satzes auf die Abbildung Γ^{-1} und den Winkel $\angle(CAB)$ mit vertauschten Rollen von B und C anwenden. \square

Korollar 4.7. *Wenn es eine Bewegung gibt, die einen Winkel in einen anderen überführt, so gibt es noch genau eine weitere. Ein Schenkel wird unter den beiden Bewegungen auf je einen anderen Schenkel des Bildwinkels abgebildet.*

Beweis. Sei $\angle BAC$ ein Winkel, den wir mittels einer Bewegung Φ abbilden.

Betrachte jetzt die Bewegung Γ , die den Strahl $\Phi(A)\Phi(B)$ auf den Strahl $\Phi(A)\Phi(C)$ und die Halbebene $H]\Phi(A)\Phi(B)\Phi(C)[$ auf $H]\Phi(A)\Phi(C)\Phi(B)[$. Nach dem Satz muss Γ auch den Strahl $\Phi(A)\Phi(C)$ auf den Strahl $\Phi(A)\Phi(B)$ abbilden. Damit ist $\Gamma \circ \Phi$ eine weitere Bewegung, die $\angle BAC$ auf $\angle \Phi(B)\Phi(A)\Phi(C)$ abbildet.

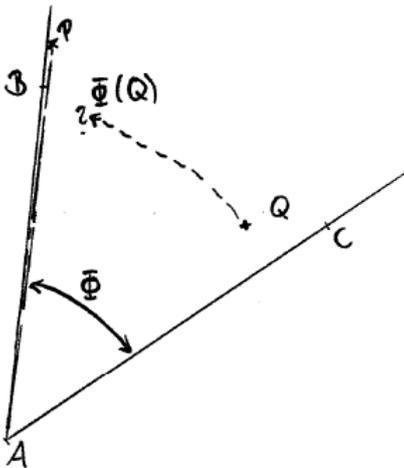
Sei nun Φ' eine weitere Bewegung, die den Winkel $\angle BAC$ auf $\angle \Phi(B)\Phi(A)\Phi(C)$ abbildet. Dann muss der Strahl AB auf einen der beiden Strahlen $\Phi(A)\Phi(B)$ oder $\Phi(A)\Phi(C)$ abgebildet werden, der Strahl AC auf den anderen.

Im ersten Fall hält aber $\Phi' \circ \Phi^{-1}$ beide Strahlen von $\angle \Phi(B)\Phi(A)\Phi(C)$ fest, also $\Phi' \circ \Phi^{-1} = \text{id}$ und somit $\Phi' = \Phi$, im zweiten Fall $\Phi' \circ (\Gamma \circ \Phi)^{-1}$, also $\Phi' = \Gamma^{-1} \circ \Phi = \Gamma \circ \Phi$. \square

Definition 4.8. Eine Teilmenge M der Ebene ist *kongruent* zu einer Teilmenge M' , wenn es eine Bewegung Γ gibt mit $\Gamma(M) = M'$. Wir schreiben dann $M \equiv M'$.

Korollar 4.9. *Ist $\angle BAC$ ein nicht gestreckter Winkel und $\angle PAQ$ ein weiterer mit gleichem Scheitel, sodass $\text{In}(\angle PAQ) \subset \text{In}(\angle BAC)$, so ist $\angle BAC \neq \angle PAQ$.*

Beweis.



Mindestens einer der beiden Punkte P und Q muss im Inneren des Winkels $\angle BAC$ liegen. OBdA sei dies Q . Seien weiter die Punkte B und C so benannt, dass $Q \in \text{In}(\angle PAC)$.

Angenommen nun, es gäbe eine Bewegung, die den Winkel $\angle PAQ$ auf den Winkel $\angle BAC$ abbildete. Dann gäbe es auch eine Bewegung Φ , die zudem den Schenkel $H[AP[$ auf den

Schenkel $H[AC[$ abbildet. Diese muss dann $H]APC[= H]APQ[$ auf $H]ACP[= H]ACB[$ abbilden. Wir fragen uns dann, was das Bild des Winkels $\angle PAC$ unter dieser Bewegung sein müsste.

Da $H[AP[$ auf $H[AC[$ abgebildet wird und $H]APC[$ auf $H]ACP[$, muss auch $H[AC[$ auf $H[AP[$ abgebildet werden, also ist das Bild wieder der Winkel $\angle PAC$. Dann kann aber nicht $H[AQ[$ aus dem Inneren von $\angle PAC$ auf $H[AB[$, das nicht im Inneren dieses Winkels liegt, abgebildet werden. \square

Lemma 4.10. *Jeder Winkel ist zu seinem Scheitelwinkel kongruent.*

Beweis. Seien AB und AC zwei Geraden mit Schnittpunkt A . Seien B^- und C^- zwei Punkte auf $H]AB^-]$ bzw. $H]AC^-]$, sodass $\angle BAC$ den Scheitelwinkel $\angle B^-AC^-$ und die Nebenwinkel $\angle B^-AC$ und $\angle BAC^-$ hat.

Betrachte die Bewegung Γ , die den Nebenwinkel $\angle B^-AC$ spiegelt, also $H[AB^-]$ auf $H[AC[$ abbildet und $H]AB^-C[$ auf $H]ACB^-]$. Nach Satz 4.6 wird dann auch $H[AC[$ auf $H[AB^-]$ abgebildet. Weil Bewegungen Geraden auf Geraden abbilden und die Abstände darauf festhalten, ist klar, dass dann auch $H]AC^-]$ auf $H]AB[$ abgebildet wird.

Dann folgt aber

$$\Gamma(\angle B^-AC^-) = \Gamma(H]AC^-] \cup H[AB^-] = H]AB[\cup H[AC[= \angle BAC.$$

\square

Lemma 4.11. *Haben wir die Relationen $\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD$ und $\angle B'A'C' + \angle C'A'D' = \angle B'A'D'$, so gilt:*

Ist $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ und $\angle CAD \equiv \angle C'A'D'$, so gilt auch $\angle BAD \equiv \angle B'A'D'$.

Beweis. [Fil93], S. 90f. \square

Satz 4.12 (Kongruenzsatz SWS). *Sind $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ zwei Dreiecke und ist $S[BA] \equiv S[ED]$, $\angle BAC \equiv \angle EDF$ sowie $S[AC] \equiv S[DF]$, so sind die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ kongruent zueinander.*

Beweis. [Fil93], S. 91. \square

Satz 4.13 (Kongruenzsatz WSW). *Sind $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ zwei Dreiecke und ist $\angle CAB \equiv \angle FDE$, $S[AB] \equiv S[DE]$ sowie $\angle ABC \equiv \angle DEF$, so sind die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ kongruent zueinander.*

Beweis. [Fil93], S. 91. \square

Satz 4.14 (Kongruenzsatz WWS). *Sind $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ zwei Dreiecke und ist $\angle CAB \equiv \angle FDE$, $\angle ABC \equiv \angle DEF$ sowie $S[BC] \equiv S[EF]$, so sind die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ kongruent zueinander.*

Beweis. [Tru87], S. 83 f. \square

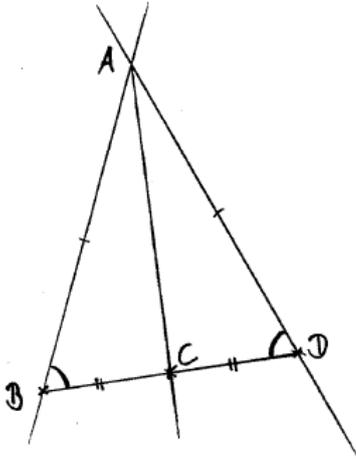
Satz 4.15 (Basiswinkelsatz). *In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel gegenüber den Schenkeln gleich.*

Beweis. Sei $\triangle ABC$ das Dreieck mit Schenkeln $S[AC]$ und $S[BC]$.
Wir verwenden die Bewegung Γ , die $H[AC]$ auf $H[BC]$ abbildet und $H]ACB[$ auf $H]ABC[$.
Nach Satz 4.6 wird dann auch $H[BC]$ auf $H[AC]$ abgebildet. Da die Abstände $d(A, C)$ und $d(B, C)$ gleich sind, werden A und B unter Γ aufeinander abgebildet. Damit ist also $\angle ABC = \angle \Gamma(B)\Gamma(A)\Gamma(C) \equiv \angle BAC$. \square

Definition 4.16. Sei $\angle BAD$ ein nicht gestreckter Winkel. Eine *Winkelhalbierende* von $\angle BAD$ ist eine Halbgerade $H]AC[$ zwischen $H]AB[$ und $H]AD[$, sodass $\angle BAC \equiv \angle CAD$.

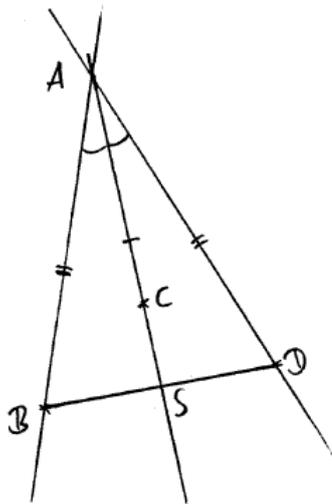
Lemma 4.17. *Jeder nicht gestreckte Winkel hat genau eine Winkelhalbierende.*

Beweis. Sei $\angle BAD$ der Winkel. OBdA können wir annehmen, dass $d(A, B) = d(A, D)$.
Existenz:



Sei C der Mittelpunkt der Strecke $S[BD]$. Da $\triangle ABD$ gleichschenkelig ist, sind die Winkel $\angle ABD = \angle ADB$ und $\angle BDA = \angle DAB$ kongruent. Außerdem sind die Strecken $S[AB]$ und $S[AD]$ ebenso wie die Strecken $S[BC]$ und $S[DC]$ paarweise kongruent, da gleich lang. Wir können jetzt den Kongruenzsatz *SWS* anwenden, und sehen, dass auch die Winkel $\angle CAB$ und $\angle CAD$ kongruent sind.

Eindeutigkeit: Sei AC eine Winkelhalbierende. Sie hat nach Lemma 3.15 einen Schnitt-



punkt S mit der Strecke $S[BD]$. Wir betrachten nun die Dreiecke $\triangle ABS$ und $\triangle ADS$. Es ist $S[AS] \equiv S[AS]$, da identisch, $S[AB] \equiv S[AD]$, da gleich lang, und $\angle BAS \equiv \angle DAS$ nach Definition der Winkelhalbierenden. Wieder mit Kongruenzsatz SWS folgt die Kongruenz der Dreiecke, also insbesondere der Strecken $S[BS]$ und $S[DS]$. S ist also der Mittelpunkt der Strecke $S[BD]$ und die Halbgerade $H[AC] = H[AS]$ damit eindeutig festgelegt. \square

Definition 4.18. Ein Winkel, der kongruent zu einem, und damit nach Lemma 4.10 beiden, seiner Nebenwinkel ist, heißt *rechter Winkel*.

Lemma 4.19. Zu jeder Halbgerade gibt es in beiden Halbebenen je genau einen rechten Winkel, dessen einer Schenkel sie ist.

Beweis. [Fil93], S. 93f.

Die Eindeutigkeit folgt aus Korollar 4.9. \square

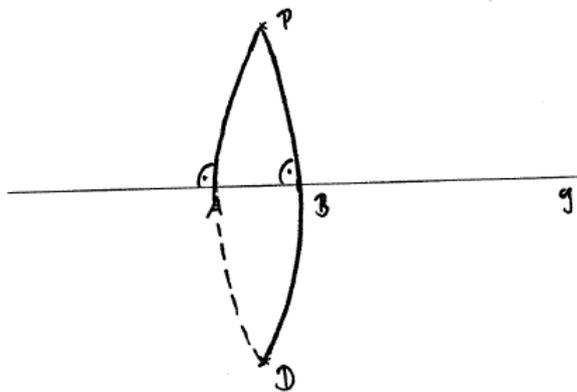
Definition 4.20. Zwei Geraden g und h heißen *senkrecht* aufeinander stehend oder *rechtwinklig* zueinander, wenn sie sich schneiden und einer und damit jeder der vier Winkel, die sie miteinander bilden, ein rechter ist. Wir schreiben dann $g \perp h$.

Es sei P ein Punkt und g eine Gerade. Eine Gerade h mit $P \in h$ und $h \perp g$ heißt *Lot* durch P auf g und der Schnittpunkt F von h und g *Fußpunkt*.

Lemma 4.21. Für jeden Punkt P und jede Gerade g gibt es genau ein Lot durch P auf g .

Beweis. [Fil93], S. 95.

Die Eindeutigkeit sieht man so: Wenn $P \in g$, so folgt es aus dem vorhergehenden Lemma. Angenommen also $P \notin g$. Gäbe es nun zwei Lote, so müssten diese verschiedene Fußpunkte A und B haben.



Betrachte nun den Punkt $D \in H]BP[$ mit $d(D, B) = d(P, B)$. Da $\angle ABP$ und $\angle ABD$ Nebenwinkel sind, sind sie nach Definition des rechten Winkels kongruent. Die Dreiecke $\triangle ABP$ und $\triangle ABD$ sind dann kongruent mit Kongruenzsatz SWS und insbesondere $\angle BAD \equiv \angle BAP$. Wegen der Eindeutigkeit des Lots in A muss also D auf PA liegen. Die Geraden DP und g hätten dann aber zwei Schnittpunkte A und B . Widerspruch! \square

Satz 4.22 (Kongruenzsatz SSS). Sind $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ zwei Dreiecke und ist $S[AB] \equiv S[DE]$, $S[BC] \equiv S[EF]$ sowie $S[CA] \equiv S[FD]$, so sind die beiden Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle DEF$ kongruent zueinander.

Beweis. [Fil93], S. 95f. \square

Definition 4.23. Die *Mittelsenkrechte* einer gegebenen Strecke AB ist das Lot zu der Geraden AB durch den Mittelpunkt der Strecke AB .

Lemma 4.24. Die *Mittelsenkrechte* einer Strecke AB ist genau die Menge der Punkte P mit $d(P, A) = d(P, B)$.

Beweis. [Fil93], S. 96. □

Lemma 4.9 bietet den Ausgangspunkt für ein Konzept von „Größen“ von Winkeln: Da kongruente Winkel niemals in einander enthalten sein können und außerdem die Enthaltenseinsrelation unter Bewegungen erhalten bleibt, ergibt es Sinn, auf den Kongruenzklassen von Winkeln eine kanonische $>$ -Relation zu definieren:

Definition 4.25. Ein nicht gestreckter Winkel $\angle BAC$ ist *größer* als ein anderer Winkel $\angle QPR$ oder es einen Winkel $\angle B'PC' \equiv \angle BAC$ gibt mit $\text{In}(\angle B'PC') \supset \text{In}(\angle QPR)$ oder äquivalent, wenn für den eindeutigen zu $\angle BAC$ kongruenten Winkel $\angle QPS$ gilt, dass $R \in \text{In}(\angle QPS)$.

Einen gestreckten Winkel definieren wir als größer als jeder nicht gestreckte Winkel. Ein Winkel, der kleiner ist als ein rechter heißt *spitz*, einer, der größer ist, aber kein gestreckter, *stumpf*.

Ausgehend von gestreckten Winkeln können wir nun auch jeder Äquivalenzklasse von Winkeln eine reelle Zahl zwischen 0 und 180, das *Gradmaß*, zuordnen, indem wir für einen rechten Winkel das Gradmaß 90 festlegen und für drei Winkelklassen mit der Relation $\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD$ (die wegen Lemma 3.16 sinnvoll definiert ist) die entsprechende Relation der Gradmaße fordern.

Jeder Winkel, der sich durch n -fache Zweiteilung eines rechten Winkels in kongruente Winkel mittels der eindeutigen Winkelhalbierenden ergibt, $\frac{90}{2^n}^\circ$. Alle anderen Winkel $\angle BAC$ erhalten als Gradmaß nach dem „Intervallschachtelungsprinzip“

$$m(\angle BAC) = \sup \left\{ \sum_i m(\angle B_i A B_{i-1}) \mid \sum_i (\angle B_i A B_{i-1}) \leq \angle BAC, m(\angle B_i A B_{i-1}) \in \left\{ \frac{90}{2^n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \right\},$$

insbesondere hat der gestreckte Winkel 180° .

Mit den Feinheiten der Konstruktion wollen wir uns nicht aufhalten, [Fil93], S. 100-103, schreibt dazu noch etwas mehr und verlagert den Rest in Übungsaufgaben. Die Surjektivität der Abbildung m folgt meiner Ansicht nach *pace* Filler relativ einfach aus der Bijektion von Halbgeraden im Inneren eines nicht gestreckten Winkels $\angle BAC$ mit den Punkten auf der Strecke $S[BC]$. Wir halten nur fest, dass auch für Nebenwinkel $\angle BAC$ und $\angle CAB^-$, deren Summe nach Bemerkung 3.17 nicht definiert ist, gilt: $m(\angle BAC) + m(\angle CAB^-) = 180^\circ = m(\angle BAB^-)$.

Stattdessen können wir unsere neuen Konzepte verwenden, um zu ein paar richtig wertvollen Aussagen der absoluten Geometrie zu gelangen:

5 Absolute Geometrie: Der Außenwinkelsatz und seine Konsequenzen

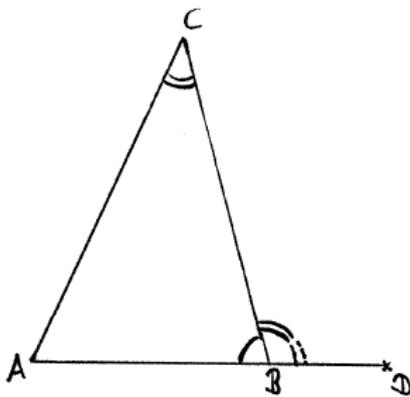
Definition 5.1. Ein Nebenwinkel zu einem Winkel eines Dreiecks heißt *Außenwinkel* des Dreiecks.

Satz 5.2 (Schwacher Außenwinkelsatz). *In einem Dreieck $\triangle ABC$ ist ein Außenwinkel stets größer als die beiden Winkel der anderen Ecken.*

Beweis. [KM81], S.7, [Fil93], S.105f., [Tru87], S. 71. □

Korollar 5.3. *Die Summe zweier Innenwinkel eines Dreiecks misst stets weniger als 180° .*

Beweis.



Betrachte im Dreieck $\triangle ABC$ oBdA die Innenwinkel $\angle ABC$ und $\angle ACB$. Sei D ein Punkt mit $\langle ABD \rangle$, sodass $\angle DBC$ Außenwinkel am Punkt B ist. Dann ist also $\angle DBC > \angle ACB$ und folglich $m(\angle ABC) + m(\angle ACB) < m(\angle ABC) + m(\angle DBC) = 180^\circ$. □

Korollar 5.4. *In jedem Dreieck sind mindestens zwei der Innenwinkel spitz.*

Definition 5.5. Hat ein Dreieck einen rechten Winkel, so heißt es *rechtwinklig*, hat es einen stumpfen, so heißt es *stumpfwinklig*, hat es nur spitze Winkel, so heißt es *spitzwinklig*. In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, *Hypotenuse*, die anderen beiden Seiten *Katheten*.

Satz 5.6. *In jedem Dreieck $\triangle ABC$ beträgt die Summe der Winkel höchstens 180° .*

Beweis. [Gans], S. 41 f. □

Korollar 5.7. *In jedem Viereck beträgt die Summe der Winkel höchstens 360° .*

Lemma 5.8. *In einem beliebigen Dreieck $\triangle(ABC)$ gilt:*

$$d(A, C) > d(B, C) \Leftrightarrow \angle(ABC) > \angle(BAC).$$

„Die längere Seite liegt dem größeren Winkel gegenüber.“

Beweis. [Tru87], S. 73 f. □

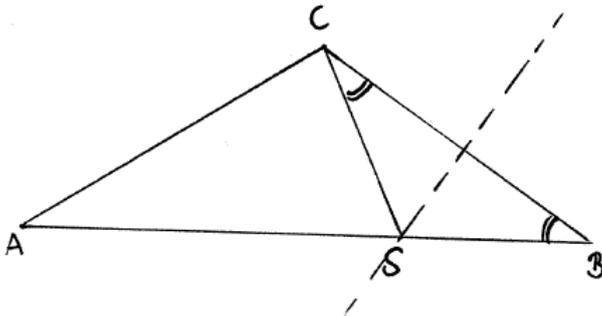
Korollar 5.9. *In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse länger als jede der Katheten.*

Lemma 5.10. *Die längste der drei Seiten eines Dreiecks wird von allen drei Mittelsenkrechten des Dreiecks geschnitten.*

Beweis. Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist ja nach Lemma 4.24 genau die Menge der Punkte, die von den beiden Enden denselben Abstand haben.

Sind in einem Dreieck zwei Seiten AB und AC gleich lang, so liegt also A auf der Mittelsenkrechten durch BC , diese schneidet also beide anderen Seiten.

Ist in einem Dreieck eine Seite, oBdA AB , länger als eine andere, oBdA AC , so liegt nach Lemma 5.8 die längere Seite dem größeren Winkel gegenüber. Wir können also an BC in C einen Winkel antragen, der gleich groß ist wie $\angle CBA$ und damit den Winkel $\angle BCA$ unterteilen. Nach der zweiten Aussage des Satzes von Pasch schneidet der Schenkel die Strecke $S]AB[$ in einem Punkt S . Nun hat das Dreieck SBC gleiche Basiswinkel, ist also gleichschenkelig. Damit liegt S auf der Mittelsenkrechten der Strecke BC , ist also der Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten mit der Seite AB .



In beiden Fällen wird von zwei Seiten die längere von der Mittelsenkrechten der dritten geschnitten. Die längste wird also von beiden anderen Mittelsenkrechten geschnitten und von ihrer eigenen sowieso. \square

Satz 5.11 (Dreiecksungleichung). *Liegen drei Punkte A , B und C nicht auf einer Geraden, so gilt:*

$$d(A, B) + d(B, C) > d(A, C).$$

Beweis. [Tru87], S. 74 f. \square

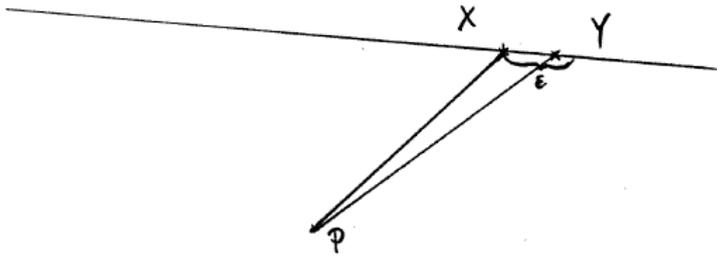
Korollar 5.12 (umgekehrte Dreiecksungleichung). *Liegen drei Punkte A , B und C nicht auf einer Geraden, so gilt:*

$$d(A, B) - d(B, C) < d(A, C).$$

Satz 5.13 (Stetigkeit des Abstands). *Ist P ein Punkt und g eine Gerade mit Parametrisierung f , so ist die Funktion*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto d(f^{-1}(x), P) \end{aligned}$$

gleichmäßig stetig.



Beweis.

Ist $P \in g$, so gilt nach Definition des Abstands $d(f^{-1}(x), P) = |x - f(P)|$, was gleichmäßig stetig ist. Sei also P im Folgenden außerhalb von g .

Wir zeigen die Stetigkeit mit dem ε - δ -Kriterium:

Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in \mathbb{R}$. Setze $\delta = \varepsilon$, dann gilt:

$$|x - y| \leq \delta \Leftrightarrow d(X, Y) \leq \delta$$

für $X := f^{-1}(x)$, $Y := f^{-1}(y)$. Nun ist aber mit Dreiecksungleichung und umgekehrter Dreiecksungleichung

$$d(X, P) - d(Y, X) < d(Y, P) < d(X, P) + d(Y, X),$$

also

$$|d(Y, P) - d(X, P)| < d(Y, X) \leq \delta = \varepsilon.$$

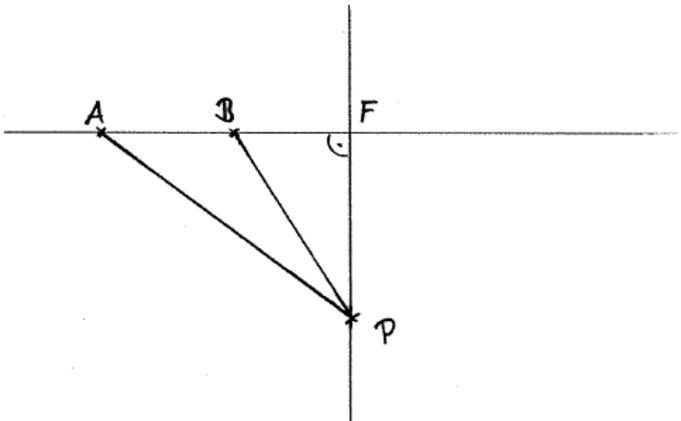
□

Satz 5.14 (Monotonie des Abstands). *Sei g eine Gerade, P ein Punkt und F der Fußpunkt des Lotes durch P auf g . Ist f_F eine der beiden Parametrisierungen der Geraden mit $f_F(F) = 0$, so ist die Funktion*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto d(f_F^{-1}(x), P) \end{aligned}$$

streng monoton fallend auf \mathbb{R}^- und streng monoton steigend auf \mathbb{R}^+ . Insbesondere ist F der Punkt auf g mit dem minimalen Abstand zu P .

Beweis.



Wir zeigen nur die strenge Monotonie auf \mathbb{R}^- , die Aussage für \mathbb{R}^+ folgt analog. Die letzte

Aussage ist dann Folgerung aus der Stetigkeit des Abstands.

Seien also zwei negative Zahlen a und b mit $a < b$ gegeben. Seien $A := f_F^{-1}(a)$ und $B := f_F^{-1}(b)$ die zugehörigen Punkte. Es gilt offensichtlich $\langle ABF \rangle$.

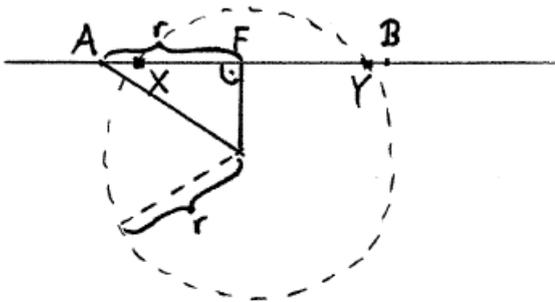
Betrachte nun das Dreieck ΔPFB . Nach dem schwachen Außenwinkelsatz ist $\angle ABP > \angle BFP$, also stumpf. Mit Korollar 5.4 sieht man im Dreieck ΔPFA , dass $\angle BAP$ spitz ist. Damit ist im Dreieck ΔPAB der Winkel $\angle BAP$ kleiner als $\angle ABP$. Lemma 5.8 liefert uns $d(B, P) < d(A, P)$ wie gefordert. \square

Definition 5.15. Ist P ein Punkt, g eine Gerade, so definieren wir den *Abstand* von P zu g als $d(P, g) := d(P, F)$ für den Fußpunkt F des Lotes durch P auf g .

Definition 5.16. Ein *Kreis* mit *Mittelpunkt* P und *Radius* $r \geq 0$ ist die Menge der Punkte X mit $d(X, P) = r$.

Lemma 5.17. *Ein Kreis schneidet eine Gerade entweder in keinem, einem oder zwei Punkten.*

Beweis.



Sei P der Mittelpunkt des Kreises, r sein Radius und g die Gerade. Sei F der Fußpunkt des Lotes durch P auf g . Es gibt drei Fälle:

Ist $d(P, F) > r$, so gilt $\forall X \in g : d(P, X) > r$. Dann gibt es also keinen Schnittpunkt.

Ist $d(P, F) = r$, so gilt $\forall X \in g \setminus \{F\} : d(P, X) > r$. Damit ist F der einzige Schnittpunkt.

Ist schließlich $d(P, F) < r$, so gehen wir so vor: Seien A und B die Punkte auf g mit $f_F(A) = -r$, $f_F(B) = r$. Betrachte das Dreieck ΔAFP . Es ist rechtwinklig mit Hypotenuse AP . Es folgt $d(A, P) > d(A, F) = r$. Wegen der Stetigkeit und Monotonie des Abstands gibt es genau einen Punkt X zwischen A und F mit $d(X, P) = r$. Ebenso gibt es genau einen Punkt Y zwischen F und B mit $d(Y, P) = r$. X und Y sind die geforderten Punkte. \square

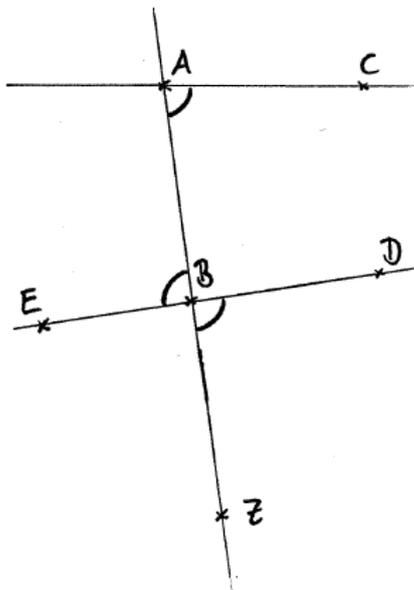
Satz 5.18 (Kongruenzsatz SSW). *Sind ΔABC und ΔDEF zwei Dreiecke und ist $S[AB] \equiv S[DE]$, $S[AC] \equiv S[DF]$ und $d(A, B) > d(A, C)$ sowie $\angle BCA \equiv \angle EFD$, so sind die beiden Dreiecke ΔABC und ΔDEF kongruent zueinander.*

Beweis. [Fil93], S. 107. \square

Definition 5.19. Zwei Geraden, die keinen Schnittpunkt haben, nennen wir *parallel*.

Definition 5.20. Sei AB eine Gerade und C und D Punkte auf derselben Seite von AB . Sei weiter E ein Punkt mit $\langle EBD \rangle$ sowie Z ein Punkt mit $\langle ABZ \rangle$.

Wir nennen dann $\angle CAZ$ und $\angle DBZ$ *Stufenwinkel* beim Schnitt der Geraden AC und BD mit der dritten Geraden AB , $\angle CAZ$ und $\angle EBA$ *Wechselwinkel*.



Lemma 5.21. *Genau dann bilden zwei Geraden beim Schnitt mit einer dritten kongruente Stufenwinkel, wenn sie kongruente Wechselwinkel bilden.*

Beweis. Klar, da $\angle DBZ$ und $\angle EBA$ aus der Definition als Scheitelwinkel kongruent sind und Kongruenz transitiv ist. \square

Satz 5.22. *Zwei Geraden, g und h , die eine dritte Gerade k schneiden und gleiche Stufen- oder Wechselwinkel bilden, sind parallel.*

Insbesondere gibt es parallele Geraden.

Beweis. [Gans], S. 7. \square

6 Die Suche nach dem Beweis des 5. Postulats

Nachdem wir nun die absolute Geometrie erkundet haben, stehen wir etwa an dem Punkt, an dem Euklid nach seinen ersten 28 Sätzen war: Er wollte mehr. Aber da die vorhandenen Axiome ihn darin zu behindern schienen, griff er schließlich darauf zurück, ein weiteres, letztes Axiom anzusetzen, eben sein 5. Postulat.

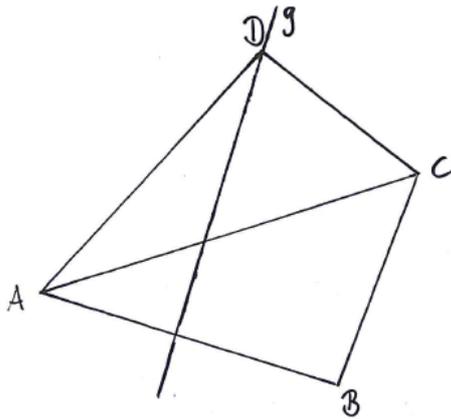
Einer der ersten, der Euklids Vorgehen kritisierte, war Poseidonios (1. Jhdt. v. Chr.). Er war überzeugt, dass man das 5. Postulat herleiten könne, wenn man nur eine bessere Definition für parallele Geraden verwendete: Zwei Geraden g und h nennen wir *parallel*, wenn ihr Abstand überall der gleiche ist, d.h. für alle P und Q aus h gilt: $d(P, g) = d(P, h)$.

Und wer sagt es – tatsächlich gelang es ihm, daraus das 5. Postulat herzuleiten. Sein genauer Beweis ist nicht überliefert, aber vielleicht folgte er diesem Gedankengang:

Lemma 6.1. *Sei $ABCD$ ein Viereck und g eine Gerade, die den Winkel $\angle ADC$ unterteilt. Dann schneidet g mindestens eine der beiden Seiten AB und BC .*

Beweis.

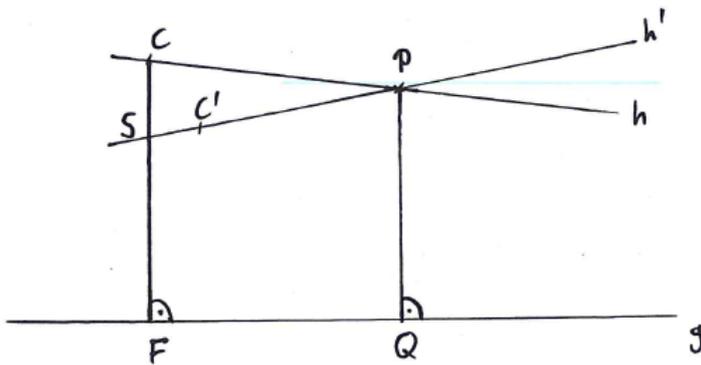
Betrachte zunächst das Dreieck ADC . Nach dem Satz von Pasch muss die Gerade g die



Seite AC schneiden.

Betrachte nun das Dreieck ABC . Wieder nach dem Satz von Pasch muss g nun eine weitere Seite des Dreiecks, also AB oder AC , schneiden. \square

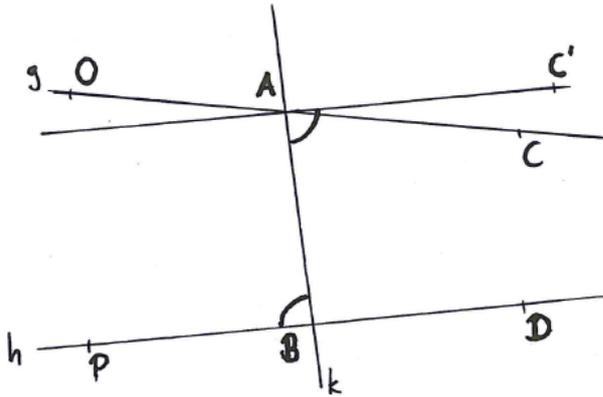
Vielleicht leitete er damit zunächst eine Hilfsaussage her: Zu einer beliebigen Geraden g und einem beliebigen Punkt $P \notin g$ gibt es nur eine Parallele zu g , die durch P geht.



Angenommen nämlich, es gäbe zwei, h und h' . Natürlich ist keine davon das Lot k durch P auf g , denn dieses hat ja in P einen Abstand von g , der größer ist als 0, im Schnittpunkt Q mit g dagegen den Abstand 0. Seien nun $C \in h$ und $C' \in h'$ Punkte auf derselben Seite vom Lot k . Einer der beiden Winkel $\angle CPQ$ und $\angle C'PQ$ muss größer sein als der andere, oBdA $\angle CPQ > \angle C'PQ$. Fällt nun das Lot von C auf g , nenne den Fußpunkt F und betrachte das Viereck $CFQP$. Da die Gerade $C'P$ den Winkel $\angle CPQ$ unterteilt, schneidet sie nach Lemma 6.1 eine der beiden Seiten CF oder FQ . Letzteres ist aber ausgeschlossen, da die beiden Geraden $C'P = h'$ und $FQ = g$ nach Voraussetzung parallel sind. Sei also S der Schnittpunkt von $C'P$ und CF . Nun ist CF auch das Lot durch S auf g , d.h. $d(S, g) = d(S, F)$. Da S auf der Parallelen h' liegt, ist also $d(S, F) = d(P, g)$. Mit dem entsprechenden Argument für h ist aber auch $d(C, F) = d(C, g) = d(P, g)$. Da S und C auf derselben Halbgeraden $H]FC[$ liegen, müssen sie dann gleich sein und damit auch die beiden Parallelen CP und $SP = C'P$, im Widerspruch zur Annahme.

Mit diesem Hilfsresultat könnte er nun so fortgefahren sein:

Seien g und h zwei Geraden, die von einer dritten Geraden k geschnitten werden, A und B die Schnittpunkte, $C \in g$ und $D \in h$ auf derselben Seite von k , $O \in g$ und $P \in h$ mit $\langle OAC \rangle$ und $\langle PBD \rangle$, sodass $\angle CAB + \angle ABD < 180^\circ$ wie in der Voraussetzung des 5. Postulats.



Sei nun $C' \in H]ABC[$ mit $\angle C'AB = \angle ABP$. Die Gerade k schneidet dann also die Geraden AC' und BD unter gleichen Wechselwinkeln, sodass diese parallel sein müssen nach 5.22. Unter Ausnutzung der Tatsache, dass $\angle ABP$ und $\angle ABD$ Nebenwinkel sind, erhalten wir $\angle C'AB + \angle ABD = \angle ABP + \angle ABD = 180^\circ > \angle CAB + \angle ABD$, also sind $\angle C'AB$ und $\angle CAB$ verschieden, und damit auch die Geraden AC' und $g = AC$. Da AC' eine Parallele durch A zu h ist, kann g nicht auch eine sein. Damit muss es einen Schnittpunkt von g und h geben. Dass dieser auf der Seite der Winkel $\angle CAB$ und $\angle ABD$ liegt, wie im 5. Postulat außerdem behauptet, folgt aus der Tatsache, dass für die Winkel auf der anderen Seite $\angle OAB + \angle ABP = (180^\circ - \angle CAB) + (180^\circ - \angle ABD) > 180^\circ$ gilt, in einem Dreieck aber zwei Innenwinkel zusammen nie mehr als 180° haben können.

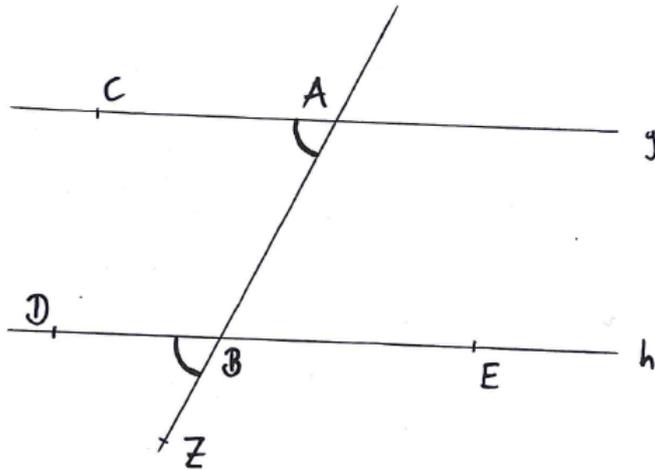
Damit sieht es so aus, als hätten wir einen Beweis für das 5. Postulat gefunden. Es gibt allerdings einen Haken bei Poseidonios' Vorgehen: Mit seiner vorgeschlagenen Definition kann er nicht einfach die Sätze benutzen, die wir für Parallelen nach Euklids Definition bewiesen haben, insbesondere, dass es parallele Geraden überhaupt gibt! Dazu müssten wir erst einmal beweisen, dass Geraden, die nach seiner Definition parallel sind, also überall denselben Abstand haben, auch in Euklids Sinne parallel sind, sich also nicht schneiden, und andersherum solche, die sich nicht schneiden, überall denselben Abstand haben. Nun ist die erste Aussage nicht weiter schwierig, denn zwei Geraden, die überall denselben Abstand haben und einen Schnittpunkt, für den der Abstand offensichtlich 0 ist, müssen überall den Abstand 0 haben und damit gleich sein. Andersherum ist aber jeder Versuch, ohne das 5. Postulat zu beweisen, dass Geraden ohne gemeinsamen Schnittpunkt bereits überall denselben Abstand haben, (oder anders ausgedrückt: dass die Punkte, die auf einer Seite einer Geraden liegen und von dieser alle denselben Abstand haben, eine Gerade bilden) zum Scheitern verurteilt.

Was Poseidonios also erreichte, war lediglich dies: Anstelle des 5. Postulats von Euklid setzte er eine alternative unbewiesene Behauptung: Geraden, die sich nicht schneiden, haben überall denselben Abstand voneinander.

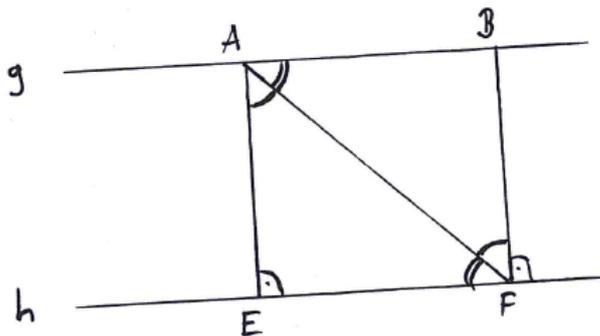
Nun kann man, wie gesehen, aus Poseidonios' Postulat Euklids herleiten, wenn man die Axiome der absoluten Geometrie annimmt. Es gilt aber auch andersherum, dass man aus Euklids 5. Postulat und den Axiomen der absoluten Geometrie Poseidonios' Postulat folgern kann:

Zuerst leiten wir wieder eine Hilfsaussage her: Zwei parallele Geraden g und h , die eine dritte Gerade k schneiden, bilden gleiche Stufen- und Wechselwinkel (Wenn diese Aussage so vorkommt, als hätten wir sie bereits bewiesen, so sei daran erinnert, dass Satz 5.22 nur die *Umkehrung* davon zum Ausdruck bringt).

Seien A und B wieder die Schnittpunkte von k mit g bzw. h , $C \in g$ und $D \in h$ auf derselben Seite von k , $E \in h$ und $Z \in k$ mit $\langle EBD \rangle$ und $\langle ABZ \rangle$, sodass $\angle CAB$ und $\angle DBZ$ die



Stufenwinkel sind. Angenommen, sie wären nicht gleich. Wenn aber $\angle CAB < \angle DBZ$, so ist $\angle CAB + \angle DBA = \angle CAB + (180^\circ - \angle DBZ) < 180^\circ$. Nach dem 5. Postulat bedeutet das aber, dass es einen Schnittpunkt von g und h gibt im Widerspruch zur Annahme, dass sie Parallelen sind. Ist aber $\angle CAB > \angle DBZ$, so gilt für die Winkel auf der anderen Seite von z die umgekehrte Ungleichung und wieder stoßen wir auf einen Widerspruch. Mit dieser Hilfsaussage können wir nun aber die Aussage folgern, dass Euklids Parallelen unter Voraussetzung des 5. Postulats überall denselben Abstand haben:



Seien nämlich g und h zwei Parallelen, A und B zwei Punkte auf g und E und F ihre Lotfußpunkte auf h . Da die Gerade h die beiden Geraden AE und BF nach Konstruktion unter gleichen Stufenwinkeln schneidet, sind diese parallel, insbesondere liegen E und F auf derselben Seite von AB . Betrachte nun die Diagonale AF . Einerseits schneidet sie die Parallelen g und h , sodass die Wechselwinkel $\angle BAF$ und $\angle AFE$ gleich sind. Andererseits schneidet sie auch die beiden Parallelen AE und BF , sodass auch die Wechselwinkel $\angle EAF$ und $\angle AFB$ gleich sind. Damit folgt mit dem Kongruenzsatz WSW, dass die Dreiecke AFE und FAB kongruent sind und damit insbesondere die Seiten AE und BF gleich lang, was genau die Aussage ist, die wir zeigen wollten.

Zusammenfassend lässt sich sagen: Das Postulat von Poseidonios und das von Euklid sind also damit vor dem Hintergrund der absoluten Geometrie logisch äquivalent. Für welches von beiden man sich entscheidet, ist damit von der Logik nicht vorgegeben, sondern kann ganz nach anderen Gesichtspunkten ausgesucht werden. Man könnte zum Beispiel Poseidonios' Postulat für kürzer und einprägsamer halten und ihm damit vor Euklids den Vorzug geben. Wenn man sich das Vorgehen genau durchsieht, erkennt man, dass ebenso die beiden Hilfsresultate, die unsere Zwischenschritte bei den beiden Beweisrichtungen waren, als

Ersatzpostulate denkbar wären: Die Aussage, dass es durch jeden Punkt zu einer vorgegebenen Geraden nur eine Parallele gibt, wird auch Playfairs Axiom genannt, nach einem Mathematiker, der genau diese Erkenntnis hatte, und das Axiom als Ersatz für Euklids 5. Postulat vorschlug. Die andere Aussage, dass parallele Geraden gleiche Stufen- und Wechselwinkel bilden, ist in der Euklidischen Geometrie als Stufen- oder Wechselwinkelsatz bekannt. Beide sind zueinander und zu den genannten Postulaten logisch äquivalent, wenn man die Axiome der absoluten Geometrie anerkennt.

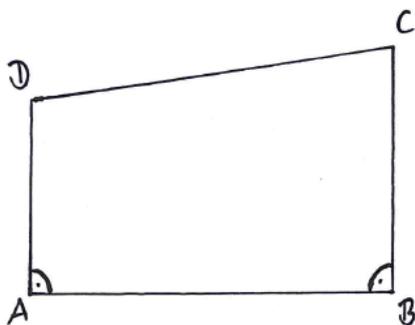
Rückblickend ist für Poseidonios' Vorgehen festzustellen, dass sein Beweisversuch daran krankte, dass er Dinge für selbstverständlich annahm, die er strenggenommen nicht verwenden durfte, nämlich dass seine und Euklids Definition für Parallelen äquivalent waren. Eine solche unbewiesene Behauptung zu verwenden ist nur dann erlaubt, wenn man sie als Axiom kennzeichnet. Dann aber hat man nur ein Axiom durch ein anderes ersetzt. Poseidonios war nun vielleicht der Erste, aber gewiss nicht der Letzte, der diesen Fehler machte. Die nächsten fast 2000 Jahre hindurch kamen Mathematiker mit Beweisansätzen, die im Grunde denselben wiederholten: Immer fehlte in ihrem vorgeschlagenen Beweis ein kleines Stück, das sie für so selbstverständlich hielten, dass sie nicht daran dachten, es zu beweisen, aber auch nicht als das erkannten, was es tatsächlich war: Ein Axiom, das sich bei genauerem Betrachten als äquivalent zu Euklids herausstellen sollte.

Andere Mathematiker wiederum machten diese Beobachtung durchaus, waren aber damit nicht zufriedengestellt. Denn während es durchaus legitim ist, das 5. Postulat durch ein anderes Axiom zu ersetzen, das logisch äquivalent ist, wäre es doch wünschenswerter, wenn man überhaupt keinen Ersatz bräuchte, indem man feststellte, dass die Axiome der absoluten Geometrie eben doch ausreichen, um eines der möglichen Ersatzaxiome und damit alle anderen zu beweisen.

Eine ganz neue Denkrichtung bei der Suche nach einem Beweis schlug erst der italienische Logiker und Mathematiker Giovanni Girolamo Saccheri (1667 - 1733) in seinem Werk *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euklid von jedem Makel befreit/freigesprochen) ein. Sein Ansatz war ein Beweis durch Widerspruch, indem er eine Annahme machte, die äquivalent zu der Verneinung des 5. Postulats ist, und daraus einen Widerspruch zu den Aussagen der absoluten Geometrie herzuleiten.

Saccheris Ausgangspunkt war dabei ein Viereck $ABCD$ mit zwei rechten Winkeln $\angle DAB$ und $\angle ABC$ und zwei gleich langen Seiten AD und BC .

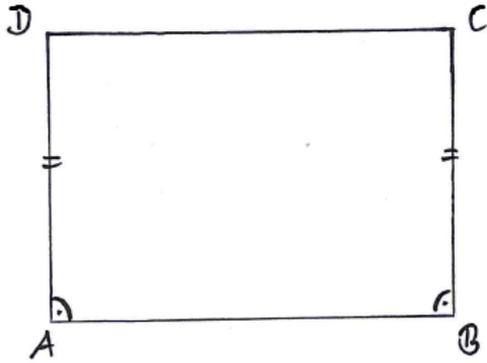
Definition 6.2. Ein Viereck $ABCD$ nennen wir *vom Saccheri-Typ*, falls $\angle DAB$ und $\angle ABC$ rechte Winkel sind.



Die Seite AB heißt dann *Basis*, die Seite DC *Gipfel*, die beiden Seiten DA und BC *Arme* und die beiden Winkel $\angle ADC$ und $\angle BCA$ *Gipfelwinkel*.

Ein *Saccheri-Viereck* ist eine Viereck vom Saccheri-Typ, bei dem zusätzlich die beiden Arme DA und BC die gleiche Länge haben.

Die erste Beobachtung, die Saccheri machte, war:



Lemma 6.3. *In jedem Saccheri-Viereck sind die beiden Gipfelwinkel gleich.*

Beweis. [Gans], S. 39f. □

Jetzt sah Saccheri: Wenn man das 5. Postulat annimmt, so kann man relativ leicht zeigen, dass die beiden Gipfelwinkel auch rechte sein müssen. Jedes Saccheri-Viereck ist dann bereits ein Rechteck.

Andersherum kann man ebenfalls zeigen: Wenn jedes Saccheri-Viereck ein Rechteck ist, dann kann man daraus das 5. Postulat folgern. Die Aussage „Jedes Saccheri-Viereck ist ein Rechteck“ ist also äquivalent zum 5. Postulat.

Seine revolutionäre Idee sah deshalb so aus: Wenn wir aus der Annahme, es gibt ein Saccheri-Viereck, das kein Rechteck ist, bei dem also die Gipfelwinkel nicht rechte sind, einen Widerspruch folgern können, so muss die Annahme falsch gewesen sein, und es ist eben doch jedes Saccheri-Viereck ein Rechteck, d.h. das 5. Postulat ist bewiesen.

Nun gibt es ja zwei Fälle zu untersuchen: Wenn die Gipfelwinkel in dem Saccheri-Viereck nicht rechte sind, so sind sie entweder stumpf oder spitz. Von der ersten Annahme kam er nach einer Reihe von seltsam anmutenden Resultaten (z.B. dass in dem Saccheri-Viereck die Basis AB länger war als der Gipfel CD oder dass ein Dreieck im Thaleskreis einen stumpfen Winkel hat) tatsächlich auf einen Widerspruch. Mit unserer Vorarbeit geht es schneller:

Lemma 6.4. *In keinem Saccheri-Viereck sind die Gipfelwinkel stumpf.*

Beweis. Das folgt sofort daraus, dass nach Korollar 5.7 die Winkelsumme im Viereck 360° nicht übersteigt. □

Ein paar der Überlegungen, die Saccheri auf dem Weg angestellt haben mochte, waren vielleicht die folgenden:

Lemma 6.5. *Sei $ABCD$ ein Saccheri-Viereck, E der Mittelpunkt der Basis AB und F der Mittelpunkt des Gipfels DC . Dann ist die Gerade EF senkrecht sowohl zu AB als auch zu DC .*

Insbesondere haben die beiden Geraden AB und DC ein gemeinsames Lot.

Beweis. [Gans], S. 40. □

Definition 6.6. Die gemeinsame Mittelsenkrechte von Basis und Gipfel eines Saccheri-Vierecks nennen wir seine *Mittellinie*.

Lemma 6.7. *In einem Viereck vom Saccheri-Typ mit ungleichen Seiten AD und BC sind auch die Winkel $\angle ADC$ und $\angle BCD$ verschieden und umgekehrt. Die längere Seite liegt dem größeren Winkel gegenüber.*

Beweis. [Gans], S. 43. □

Nachdem er den Fall stumpfer Gipfelwinkel abgelegt hatte, nahm er sich den Fall spitzer Gipfelwinkel vor. Auch hier konnte er eine Reihe seltsamer Resultate ableiten, z.B. das folgende:

Lemma 6.8. *In einem Saccheri-Viereck ist der Gipfel mindestens so lang wie die Basis und die Arme mindestens so lang wie die Mittellinie. Gleichheit gilt nur dann, wenn die Gipfelwinkel rechte sind.*

Beweis. [Gans], S. 47f, aber mit $\angle BCD \leq 90^\circ$ statt $<$. □

Diesmal allerdings gelang es ihm nicht, zu einem ähnlichen Widerspruch zu kommen, dabei wurden die Aussagen, die er aus der Annahme herleiten konnte, immer abstruser:

1. Es gibt Dreiecke mit weniger als 180° Winkelsumme. Tatsächlich gibt es überhaupt keine, die auf 180° kommen.
2. Ein Dreieck im Thaleskreis hat nur spitze Winkel.
3. Eine Gerade kann mehrere Parallelen haben, die sich schneiden.
4. Parallele Geraden haben nicht unbedingt überall denselben Abstand: Spätestens ab einem Punkt wächst er immer weiter.

Es ist nicht bekannt, ob aus Frustration oder nur um der Kritik zu entgehen, die unvermeidlich wäre, wenn er *nicht* zu einem echten Widerspruch käme – irgendwann verließ Saccheri den befestigten Pfad der Logik, argumentierte anschaulich und bemühte „unendlich ferne Punkte“, bis er an eine Aussage kam, die er als „zu dem Wesen einer Geraden im Widerspruch stehend“ ansah und das Buch abschloss.

Saccheris Werk erfuhr gute Rezeption und seine Herangehensweise wurde von dem meisten seiner Nachfolger übernommen. Einer, der einen strukturell ähnlichen Versuch, das 5. Postulat zu beweisen, unternahm, war der Schweizer Mathematiker Johann Heinrich Lambert (1728-1777) in seiner *Theorie der Parallellinien* (1766). Auch er ging von einer Figur aus, für die man in der euklidischen Geometrie zeigen kann, dass sie ein Rechteck ist, um die Annahme, es handle sich nicht um ein Rechteck, ab absurdum zu führen.

Definition 6.9. Ein Viereck $ABCD$ heißt *Lambert-Viereck*, wenn es vom Saccheri-Typ ist und einen rechten Gipfelwinkel $\angle BCD$ hat.

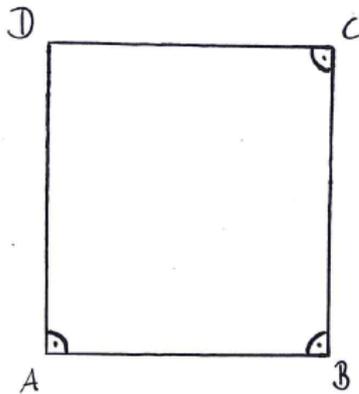
Der andere Gipfelwinkel $\angle ADC$ heißt dann der *vierte Winkel* des Lambert-Vierecks.

Lemma 6.10. *Der vierte Winkel jedes Lambert-Vierecks ist höchstens 90° .*

Beweis. Das folgt wieder aus Korollar 5.7 über die Winkelsumme im Viereck. □

Lemma 6.11. *Ist $ABCD$ ein Saccheri-Viereck und sind E und F die Mittelpunkte von Basis und Gipfel, so ist $ABEF$ ein Lambert-Viereck.*

Jedes Lambert-Viereck ist auf diese Weise darstellbar.



Beweis. Die erste Aussage folgt daraus, dass die Mittellinie senkrecht sowohl auf der Basis als auch dem Gipfel steht.

Für die zweite Aussage vergleiche [Gans], S. 48f. □

Korollar 6.12. *In einem Lambert-Viereck ist jede an den vierten Winkel grenzende Seite mindestens so lang wie die jeweils gegenüberliegende Seite. Gleichheit gilt nur dann, wenn der vierte Winkel ein rechter ist.*

Korollar 6.13. *Genau dann gibt es ein Lambert-Viereck mit einem spitzen vierten Winkel, wenn es ein Saccheri-Viereck mit spitzen Gipfelwinkeln gibt.*

Genau dann sind in allen Lambert-Vierecken die vierten Winkel spitz, wenn in allen Saccheri-Vierecken die Gipfelwinkel spitz sind.

Lambert musste, wie wir aus jetziger Sicht wissen, mit seinem Versuch scheitern wie alle vor ihm. Im Gegensatz zu Saccheri war er sich allerdings im Klaren darüber, dass er nicht an das Ziel gelangt war.

Auch wenn noch nach Lambert Versuche angestellt wurden, das 5. Postulat zu beweisen, näherte sich die Zeit rapide ihrem Ende. Gauß, der lange daran forschte, war einer der ersten, der in Briefen Zweifel zum Ausdruck brachte, dass es überhaupt einen Beweis dafür geben könnte und es neben der euklidischen Geometrie, die das Postulat oder eines seiner Ersatzaxiome benutzte, vielleicht eine nichteuklidische geben könnte, die es durch sein Gegenteil ersetzte, ohne dadurch einen Widerspruch zu generieren. Vielleicht aus Sorge vor dem Aufschrei der Öffentlichkeit veröffentlichte er allerdings nichts. So waren es der Ungar János Bolyai (1802-1867) und der Russe Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792 - 1856), die mit ihren Abhandlungen als die Entdecker der hyperbolischen Geometrie gelten.

Beide veröffentlichten unabhängig von einander und beinahe zeitgleich (Lobatschewski 1829/30, Bolyai 1832) Arbeiten, die die Möglichkeit vollständig akzeptierten, dass das 5. Postulat und alle seine äquivalenten Ersatzaxiome nicht aus den anderen Axiomen ableitbar ist und deshalb ohne Gefahr eines Widerspruchs durch sein Gegenteil ersetzbar. Die Geometrie, die sich dadurch ergab, und für die sich im Laufe der Zeit der Name „hyperbolisch“ einbürgerte (Lobatschewski sprach von „Pangeometrie“ im Sinne von „allgemeiner“ Geometrie, was als Namenswahl etwas unglücklich ist, da dieser Begriff eher mit der absoluten Geometrie in Verbindung gebracht werden würde), war natürlich insofern ungewöhnlich, als logischerweise alle Aussagen, die sich im Laufe der Zeit als äquivalent zu Euklids 5. Postulat erwiesen hatten, nicht gelten konnten. Ebenso klar ist, dass alle Aussagen, die bei den missglückten Versuchen, das Postulat durch einen Widerspruchsbeweis zu beweisen, als Zwischenresultate erzeugt worden waren, Sätze dieser neuen Geometrie sein müssen.

Gleichzeitig hat die Geometrie aber auch insofern Vertrautes, als selbstverständlich alle Sätze, die das 5. Postulat für ihren Beweis nicht erfordern, also das gesamte Gebäude der absoluten Geometrie, weiterhin Bestand haben.

Die Leistung Bolyais und Lobatschewskis war es, die Möglichkeit einer nichteuklidischen Geometrie anzuerkennen. Einen Beweis dafür lieferten indes beide nicht. Jetzt aber, da die Stoßrichtung der Bemühungen umgekehrt war, dauerte es, gemessen an den gut 2000 Jahren davor, nicht mehr allzu lange: 1868 gelang es dem italienischen Mathematiker Eugenio Beltrami (1835-1900), die Unabhängigkeit des 5. Postulats von den anderen Axiomen, also die Widerspruchsfreiheit der hyperbolischen Geometrie (unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der euklidischen Geometrie, die damals zwar allgemein als sicher galt, aber erst später bewiesen wurde, genauer: auf die Widerspruchsfreiheit letztlich der Theorie der natürlichen Zahlen zurückgeführt) zu zeigen. Sei Ansatz war es, ein Modell der hyperbolischen Geometrie zu konstruieren, indem er gewisse Objekte der euklidischen (!) Geometrie als „Geraden“, „Halbebenen“ usw. deklarierte und prüfte, dass sie alle Eigenschaften hatten, die Geraden, Halbebenen usw. haben sollten, d.h. alle, die in den Axiomen der absoluten Geometrie gefordert werden, nicht aber das 5. Postulat, sodass das Beispiel zeigte, dass es möglich war, die Axiome der absoluten Geometrie mit der Verneinung des 5. Postulats zu verbinden. Anders formuliert: Indem er die Grundobjekte der hyperbolischen Geometrie durch Objekte der euklidischen ersetzte, wurden zugleich die Aussagen der Axiome der hyperbolischen Geometrie in Aussagen umgewandelt, die in der euklidischen Geometrie beweisbar, also Sätze sind. Zugleich wird aber natürlich jeder Satz der hyperbolischen Geometrie in einen Satz der euklidischen Geometrie (über die anderen Objekte) umgewandelt und jeder Schritt in seinem Beweis lässt sich eins zu eins übertragen. Wenn also die euklidische Geometrie widerspruchsfrei ist, so haben insbesondere alle Sätze, die diesen Axiomen der hyperbolischen Geometrie entsprechen, Gültigkeit, und dann auch alle Sätze, die sich daraus folgern lassen, also die gesamte hyperbolische Geometrie.

Wir werden Beltramis Weg nicht einschlagen, sondern die hyperbolische Geometrie wie zuvor die absolute logisch-abstrakt aufbauen. Von Beltramis Modell wollen wir nur im Hinterkopf behalten, dass es konstruiert werden kann und die Widerspruchsfreiheit hyperbolischen Geometrie damit gesichert ist. Für die Sätze und Beweise selbst können wir uns die Ebene weiterhin im Großen und Ganzen vorstellen wie bisher, wir müssen nur daran denken, dass manche Dinge, die wir aus unserer euklidisch geprägten Vorstellung als gültig zu erachten gewohnt sind, es nicht sind.

Um dies in den Beweisen deutlich zu machen, werden die Skizzen oft bestimmte Aspekte der hyperbolischen Wirklichkeit betonen, andere dagegen schweigend verschleiern. Es können auf einem Papier, das eben in guter Näherung die euklidische Ebene darstellt, keine Zeichnungen angefertigt werden, die gleichzeitig alle Winkel und alle Abstände korrekt genug darstellen und trotzdem eindeutig als nicht-euklidisch erkennbar sind. Das liegt nicht daran, dass unser Universum nicht vielleicht lokal mit hyperbolischer Geometrie besser beschrieben werden könnte als mit euklidischer (das müsste nach Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie davon abhängen, wie die Verteilung der Massen in diesem Abschnitt des Universums aussieht), sondern daran, dass sich die hyperbolische Geometrie „im Kleinen“ (und was das bedeutet, werden wir noch sehen) der euklidischen annähert, und daran, dass wir eben unsere Papiergröße nicht in den astronomischen Dimensionen wählen können, in denen der Unterschied sichtbar werden würde.

7 Der Hauptsatz der hyperbolischen Geometrie

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben, gibt es gleich eine ganze Reihe von alternativen Aussagen, die anstelle des 5. Postulats als Grundlage der spezifisch euklidischen Geometrie dienen können. Das Unbehagen, das viele seiner Nachfolger mit Euklids Wahl des 5. Postulats hatten, beruht sicher zum Teil auf seiner schieren Länge und „Unhandlichkeit“ im Vergleich zu den anderen Postulaten. Die ganze Formulierung erinnert mehr an einen Satz - was der zweite Teil der Aussage strenggenommen ja auch ist.

Warum hat sich Euklid wohl dafür entschieden? Die Frage lässt sich nicht mit Bestimmtheit beantworten. Ein Vorteil gegenüber Poseidonios' implizitem Postulat „Parallele Geraden haben entlang ihrer ganzen Länge denselben Abstand“ ist die theoretische Überprüfbarkeit (vgl. Trudeau, S. 124): Wenn wir Geraden wie in der Voraussetzung des 5. Postulats haben, so findet sich ihr Schnittpunkt immer in endlicher Entfernung. Aufgrund trigonometrischer Aussagen können wir aus der Messung der Winkel sogar vorhersagen, wo er sich befinden muss. Ob dagegen zwei parallele Geraden auf ihrer unbegrenzten Länge immer denselben Abstand zueinander haben, lässt sich nicht einmal in einem einzigen Spezialfall prüfen.

Die Entscheidung gegen Playfairs Postulat „Zu jeder vorgegebenen Gerade g und einem Punkt P , der nicht darauf liegt, gibt es genau eine Gerade, die parallel zu g ist und durch P geht“ lag vielleicht in der Negativität der Aussage: Dass eine Parallele zu g durch P existiert, wird ja in Satz 5.22 bewiesen. Die eigentliche Aussage ist also, dass es keine weiteren gibt. Vielleicht zog es Euklid vor, in seinem Postulat die Existenz eines Objekts (und eine Aussage, wo es zu finden sei) zu fordern anstelle einer Nichtexistenz.

Für uns, die wir uns an dieser Weggabelung von Euklid trennen wollen, stellt sich eine analoge Frage: Genau wie jedes alternative Postulat eine logisch gleichwertige Grundlage für die spezifisch euklidische Geometrie ist, ist seine Verneinung ein möglicher Ausgangspunkt für unsere Erkundung der hyperbolischen Geometrie. Welchen also nehmen?

Dass ich mich dazu entschieden habe, die Verneinung von Euklids 5. Postulat zu verwenden, hat vor allem symbolischen Charakter: Genau ab hier verabschieden wir uns von Euklids gut ausgebautem Pfad und wagen uns in das Dickicht hyperbolischer Geometrie:

Axiom 5 (hyperbolisches Postulat). *Es gibt zwei Geraden g und h , die eine dritte Gerade k so schneiden, dass die Winkel auf einer Seite von k zusammen kleiner sind als 180° , und die sich trotzdem nicht schneiden.*

Bemerkung 7.1. Klar sollte sein, dass dieses hyperbolische Postulat erst einmal nicht besonders hilfreich ist: Es gibt also zwei Geraden, die eine dritte wie in der Voraussetzung schneiden, und selber keinen Schnittpunkt haben. Wir wissen aber andererseits: Wählen wir die drei Ecken A , B und C eines Dreiecks, so schneiden die Geraden AB und BC die dritte Gerade AC in zwei Winkeln, die zusammen kleiner als 180° sind (Korollar 5.3), sie erfüllen also die Voraussetzung. Diese speziellen Geraden besitzen aber definitiv einen Schnittpunkt, nämlich B . Das heißt: Manchmal gibt es einen Schnittpunkt, manchmal nicht. Woher soll man wissen, wann welcher Fall vorliegt?

Aus diesem Grund werden uns unsere ersten Schritte an einen Punkt bringen, von dem es eine bessere Aussicht gibt:

Satz 7.2. *Es gibt eine Gerade g und einen Punkt P , der nicht auf g liegt, sodass es durch P mindestens zwei verschiedene Geraden gibt, die beide parallel zu g sind.*

Beweis. Seien g , h und k die Geraden aus dem hyperbolischen Postulat. Sei α einer der Winkel zwischen g und k , P der Schnittpunkt von h und k . Natürlich ist P nicht auf g , sonst würden sich h und g ja schneiden. Tragen wir an k in P den Winkel α in die

gleiche Richtung noch einmal ab, so erhalten wir eine Figur wie in Euklids Satz 5.22, in der zwei Geraden beim Schnitt von einer dritten gleiche Stufenwinkel bilden. Diese sind also parallel.

Andererseits sind die Geraden g und h nach Voraussetzung parallel. h und die neue Gerade sind aber offensichtlich nicht gleich, denn der Stufenwinkel von h zu α ist $180^\circ - \beta > (\alpha + \beta) - \beta = \alpha$. Wir haben also zwei Geraden durch einen Punkt P gefunden, die beide parallel zu g sind. \square

Satz 7.3. *Es gibt ein Dreieck, dessen Winkelsumme nicht 180° beträgt.*

Bemerkung 7.4. Nach dem, was wir in Kapitel 2 gesehen haben, muss dieses Dreieck eine Winkelsumme haben, die kleiner ist als 180° .

Beweis. [Per62], S. 28f. \square

Satz 7.5. *Es gibt kein Dreieck, dessen Winkelsumme 180° beträgt.*

Beweis. [Per62], S. 26ff. Beweis durch Widerspruch: Angenommen, es gäbe ein Dreieck, dessen Winkelsumme genau 180° beträgt. Wir zeigen: Dann hat auch jedes andere Dreieck 180° Winkelsumme. Da wir bereits ein Dreieck konstruiert haben, für das das nicht gilt, kann unsere Annahme nicht stimmen. \square

Korollar 7.6. *Die Winkelsumme in jedem Viereck ist kleiner als 360° .*

Beweis. Sei $ABCD$ ein beliebiges Viereck. Durch die Diagonale AC wird es in zwei Dreiecke zerlegt, die jeweils eine Winkelsumme von weniger als 180° haben. \square

Korollar 7.7. *Die Gipfelwinkel in jedem Saccheri-Viereck sind spitz.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass die Gipfelwinkel in jedem Saccheri-Viereck einander gleich sind. Da die beiden Basiswinkel bereits zusammen 180° ausmachen, bleiben für die Gipfelwinkel zusammen nur noch weniger als 180° übrig. \square

Satz 7.8 (Kongruenzsatz WWW). *Stimmen zwei Dreiecke in allen drei Winkeln überein, so sind sie kongruent.*

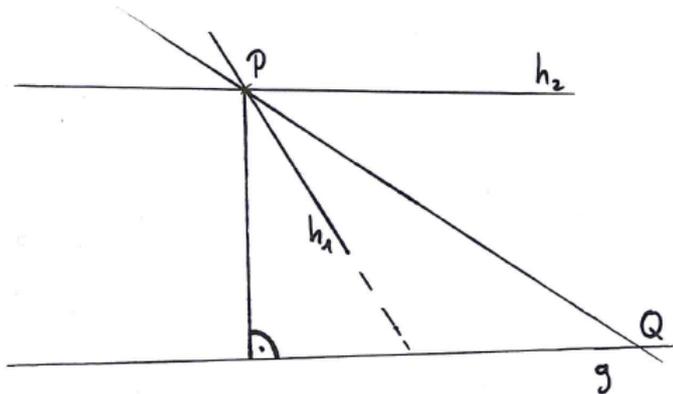
Beweis. [Gan73], S. 57f. \square

Hauptsatz 7.9 (Hauptsatz der hyperbolischen Geometrie). *Sei g eine Gerade. Dann gibt es durch jeden Punkt P , der nicht auf g liegt, unendlich viele Geraden, die parallel zu g sind.*

Beweis. [Per62], S. 28 zeigt, dass es mindestens zwei Geraden gibt, die durch P verlaufen und parallel zu g sind. Andernfalls könnten wir nämlich zwei Punkte Q und R auf g wählen und folgern, dass das Dreieck PQR eine Winkelsumme von 180° haben müsste.

Um zu sehen, dass es tatsächlich unendlich viele sind, genügt es zu zeigen, dass jede Gerade, die ebenfalls durch P geht und zwischen zwei zu g parallelen Geraden h_1 und h_2 liegt in dem Sinne, dass sie mit dem Lot von P auf g einen Winkel bildet, der zwischen den Winkeln der beiden Parallelen liegt, selbst parallel sein muss. Das beweisen wir wieder durch Widerspruch:

Angenommen, die Gerade schneide g in einem Punkt Q . Q ist nicht der Fußpunkt des Lots von P auf g , da es keinen kleineren Winkel zum Lot gibt als 0° . Sei also F dieser Fußpunkt. Dann bilden P , Q und F ein Dreieck, da P nach Voraussetzung nicht auf g liegt. Eine der



beiden Geraden h_1 und h_2 hat nach Voraussetzung einen Winkel zum Lot, der kleiner ist als $\angle FPQ$, also ist sie entweder selbst das Lot oder sie unterteilt den Winkel $\angle FPQ$. In beiden Fällen schneidet sie g , im letzteren Fall nach dem Satz von Pasch. \square

8 Hyperparallelen

In Euklids Beweis für die Existenz von Parallelen haben wir eine explizite Konstruktion dafür gesehen: Wir tragen auf einer Geraden k zweimal denselben Winkel α ab und erhalten damit zwei parallele Geraden g und h .

Nach Konstruktion werden diese beiden Geraden von einer dritten Geraden, nämlich k , so geschnitten, dass gleiche Stufen- und damit nach Satz 5.21 auch Wechselwinkel entstehen. Nun gibt es für einen Mathematiker zwei Fragen, die auf der Hand liegen:

Erstens: Gibt es für *jedes* Paar paralleler Geraden eine dritte, die diese unter gleichen Wechselwinkeln schneidet?

Zweitens: Wenn zwei Geraden von einer dritten unter gleichen Wechselwinkeln geschnitten wird, gilt dasselbe dann auch für jede andere Gerade, die sie beide schneidet?

Die Antwort auf beide Fragen lautet „nein“, wie wir in diesem Kapitel sehen werden.

Wir beginnen zunächst damit, eine äquivalente Charakterisierung dieser Geraden zu finden:

Lemma 8.1. *Seien zwei Geraden g und h gegeben. Wenn es eine dritte Gerade k gibt, die sie unter gleichen Wechselwinkeln schneidet, dann sind g und h parallel und haben ein gemeinsames Lot.*

Beweis. [Gan73], S. 50 \square

Bemerkung 8.2. Wie aus der Kongruenz der konstruierten Konstruktion hervorgeht, sind die Strecken CD und CE gleich lang, C ist also der Mittelpunkt des gemeinsamen Lotes.

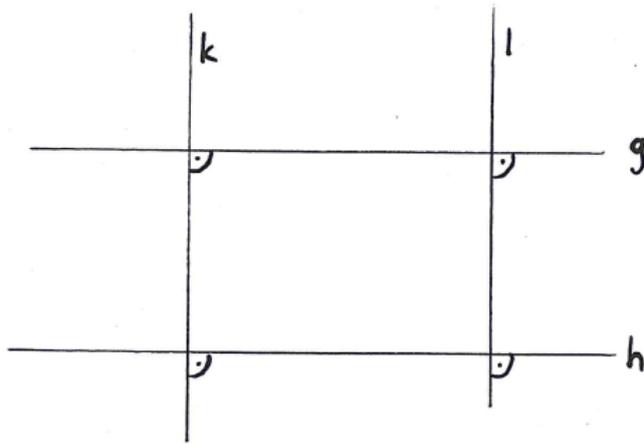
Definition 8.3. Parallele Geraden, die ein gemeinsames Lot haben, nennen wir *hyperparallel* oder *divergent parallel*.

Eine einfache Tatsache für hyperparallele Geraden können wir jetzt schon folgern:

Lemma 8.4. *Hyperparallele Geraden haben kein zweites gemeinsames Lot.*

Beweis.

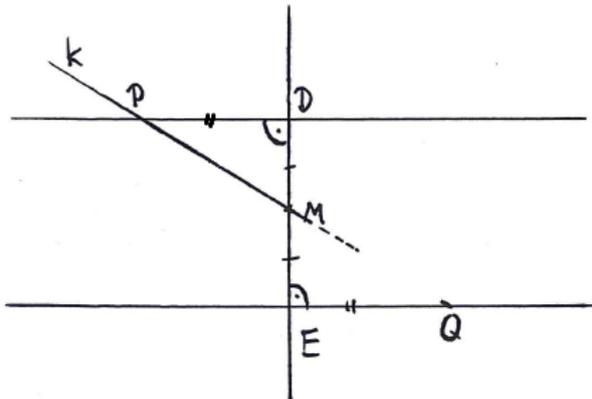
Beweis durch Widerspruch: Angenommen die Geraden g und h hätten zwei gemeinsame Lote k und l . Da dann g ein gemeinsames Lot von k und l darstellt, sind auch k und l



hyperparallel, schneiden sich also insbesondere nicht. Dann bilden die vier Geraden aber offensichtlich ein Viereck mit vier rechten Winkeln, was es nach Korollar 7.6 nicht geben kann. \square

Wir sind jetzt in der Lage, die zweite der obigen Fragen zu beantworten:

Lemma 8.5. *Seien g und h hyperparallele Geraden. Dann sind die Geraden, die beide unter gleichen Wechselwinkeln schneiden, genau diejenigen, die durch den Mittelpunkt ihres gemeinsamen Lotes gehen und eine der beiden Geraden schneiden.*



Beweis. Sei M der Mittelpunkt des Lotes, D und E seine Fußpunkte auf g bzw. h . Sei k eine Gerade, die durch M geht und eine der beiden Geraden, oBdA g in einem Punkt P schneidet.

Wenn k gleich dem gemeinsamen Lot sind, so schneidet es g und h offenbar unter gleichen (rechten) Wechselwinkeln. Andernfalls ist $P \neq D$. Trage auf h ausgehend von E eine Strecke ab, die gleich lang ist wie DP und auf der anderen Seite des gemeinsamen Lotes liegt. Nenne den Endpunkt Q . Dann sind die rechtwinkligen Dreiecke MDP und MEQ kongruent nach Kongruenzsatz SWS. Insbesondere sind die Winkel bei M gleich. Es folgt, dass die Strecke MQ auf der Geraden k liegt, diese also auch h schneidet, und zwar ebenfalls wegen der Kongruenz unter dem gleichen Winkel wie g .

Sei andererseits k eine Gerade, die g und h unter gleichen Wechselwinkeln schneidet. Wie im Beweis von Lemma 8.1 konstruieren wir ein gemeinsames Lot, das nach Lemma 8.4

das einzige ist. Dann wissen nach der Bemerkung 8.2, dass k durch dessen Mittelpunkt verläuft. \square

Der folgende Satz erklärt die Bezeichnung „divergent parallel“.

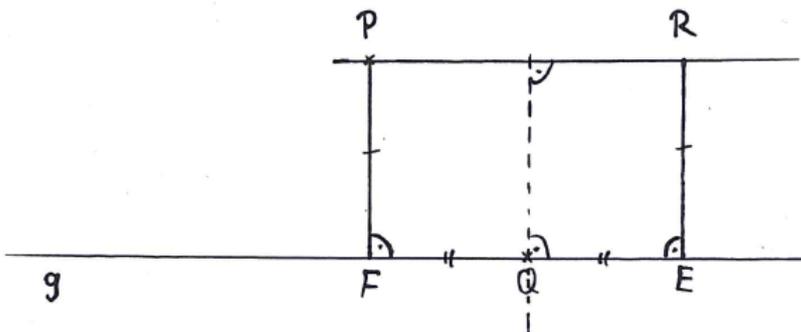
Satz 8.6. *Der Abstand zweier hyperparalleler Geraden ist am kürzesten entlang ihrem gemeinsamen Lot. In beide Richtungen erhöht sich der Abstand, je weiter man sich von diesem Lot entfernt.*

Beweis. Vgl. [Gan73], S. 51. \square

Die folgenden Lemmata liefern eine gute Vorstellung von der Menge der Hyperparallelen zu einer Geraden durch einen vorgegebenen Punkt:

Lemma 8.7. *Seien eine Gerade g und ein Punkt P außerhalb von g gegeben. Dann gibt es zu jedem Punkt Q auf g genau eine Gerade, die durch P geht und mit g ein gemeinsames Lot mit Fußpunkt Q hat.*

Beweis.



Existenz: Sei k das Lot von P auf g und F dessen Fußpunkt.

Ist $Q = F$, so konstruiere die Senkrechte von k im Punkt P , diese ist dann unsere gesuchte Gerade.

Ist $Q \neq F$, so konstruiere den Punkt E auf g mit $\angle FQE$ und $d(E, Q) = d(F, Q)$. Errichte das Lot in E auf g auf die Seite, auf der auch P liegt, und suche den Punkt R mit $d(R, E) = d(P, F)$. Dann ist das Viereck $FERP$ nach Konstruktion ein Saccheri-Viereck mit Basis EF . Nach Lemma ?? folgt: Die Mittellinie ist ein gemeinsames Lot der Geraden $EF = g$ und PR und geht nach Konstruktion durch Q .

Eindeutigkeit: Angenommen, es gäbe zwei Geraden i und j , die beide durch P gehen und jede eine gemeinsames Lot mit g haben, das den Punkt Q als Fußpunkt hat.

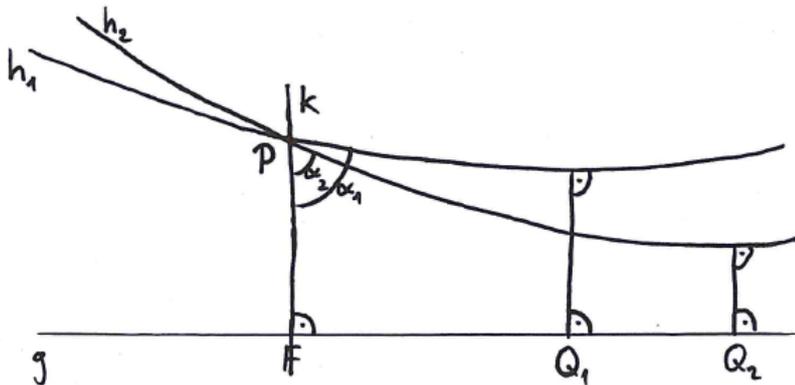
Da die Senkrechte zu g in Punkt Q eindeutig ist, müssen beide gemeinsamen Lote dieselbe Gerade k sein. Insbesondere ist k ein gemeinsames Lot von i und j und die beiden Geraden i und j sind hyperparallel, können sich also nicht in Punkt P schneiden. \square

Jede Hyperparallele zu g durch P bildet natürlich einen Winkel zum Lot k von P auf g . Da die Gipfelwinkel eines Saccheri-Vierecks akut sein müssen, liegt der Lotfußpunkt Q nach Konstruktion stets auf der Seite des akuten Schnittwinkels von k und h , wenn es einen gibt. Schneiden sich k und h senkrecht, liegt Q wie gesehen auf k .

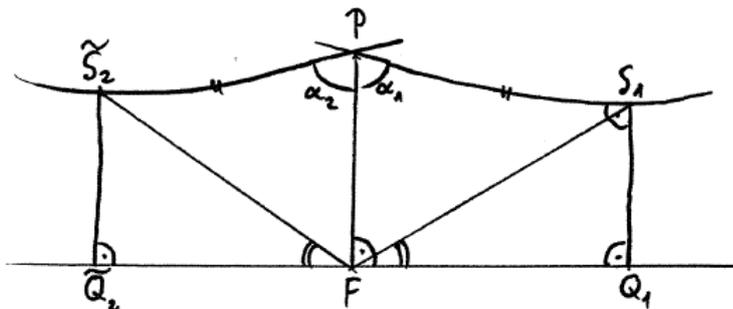
Das folgende Lemma klärt, wie sich der Winkel mit wanderndem Lotfußpunkt Q ändert:

Lemma 8.8. Sei g eine Gerade, P ein Punkt außerhalb von g , k das Lot von p auf g und F dessen Fußpunkt. Seien h_1 und h_2 zwei zu g hyperparallele Geraden durch P . Sind Q_1 und Q_2 die Fußpunkte der gemeinsamen Lote mit g auf g , α_1 und α_2 die kleineren Winkel zwischen k und h_1 bzw. h_2 , so gilt:

1. $\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow d(F, Q_1) = d(F, Q_2)$.
2. $\alpha_1 > \alpha_2 \Leftrightarrow d(F, Q_1) < d(F, Q_2)$.



Beweis. (1): Wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$, so sind $Q_1 = Q_2 = F$, und andersherum. Andernfalls gilt: Liegen α_1 und α_2 auf derselben Seite und sind gleich, so sind h_1 und h_2 gleich und es ist nichts zu zeigen. Ebenso: Liegen Q_1 und Q_2 auf derselben Seite und sind gleich weit von f entfernt, so sind sie gleich und wegen der Eindeutigkeit der Hyperparallele mit gegebenem Fußpunkt auch h_1 und h_2 und wir sind wieder fertig.



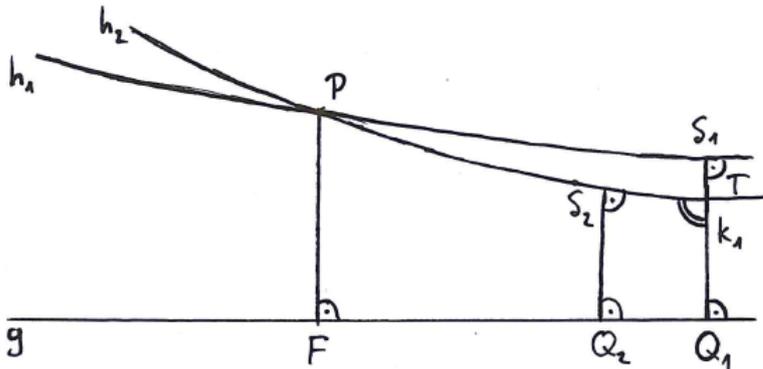
Sind α_1 und α_2 gleich und auf verschiedenen Seiten, so betrachte den Lotfußpunkt S_1 auf h_1 . Konstruiere den Punkt \tilde{S}_2 auf h_2 im gleichen Abstand zu P und den Fußpunkt \tilde{Q}_2 des Lotes durch \tilde{S}_2 auf g . Die Dreiecke S_1PF und \tilde{S}_2PF sind kongruent nach Kongruenzsatz *SWS*, also ist insbesondere $\angle \tilde{Q}_2F\tilde{S}_2 = \angle Q_1FS_1$ und $d(\tilde{S}_2, F) = d(S_1, F)$. Mit Kongruenzsatz *WWS* sind dann auch die Dreiecke $\tilde{Q}_2F\tilde{S}_2$ und Q_1FS_1 kongruent. Es folgt einerseits $d(\tilde{Q}_2, F) = d(Q_1, F)$, andererseits, dass $\tilde{S}_2\tilde{Q}_2$ das gemeinsame Lot von h_2 und g ist, wegen der Eindeutigkeit also $Q_2 = \tilde{Q}_2$.

Sind andersherum Q_1 und Q_2 auf beiden Seiten gleich weit von F entfernt, so folgt mit ähnlichen (leichteren) Argumenten, dass $\alpha_1 = \alpha_2$.

(2): Ist entweder $\alpha_1 = 90^\circ$ oder $d(F, Q_1) = 0$, so folgt die Aussage sofort.

Andernfalls können wir uns wegen 1. auf den Fall beschränken, dass α_1 und α_2 und damit auch Q_1 und Q_2 auf derselben Seite von k liegen. Sei also $\alpha_1 > \alpha_2$. Wenn wir mit k_1 und

k_2 die beiden gemeinsamen Lote bezeichnen, so sind k , k_1 und k_2 offenbar hyperparallel mit gemeinsamem Lot g , schneiden sich also insbesondere nicht.



!!!Es ist klar, dass $Q_2 \neq F$, da sonst $\alpha_2 = 90^\circ \geq \alpha_1$. Angenommen, Q_2 läge zwischen F und Q_1 . Mit zweimaliger Anwendung vom Lemma 6.1 erhalten wir, dass erstens k_1 und h_2 einen Schnittpunkt T haben müssen und zweitens S_2 , der Schnittpunkt von k_2 und h_2 , zwischen P und T liegt. Nun ist $\angle Q_1TP$ als Außenwinkel des Dreiecks TS_1P größer als $\angle Q_1S_1P$, also stumpf. Dann haben wir aber ein Viereck $S_2TQ_1Q_1$ mit drei rechten und einem stumpfen Winkel im Widerspruch zu Korollar 7.6. Es ist also Q_1 zwischen F und Q_2 .

Sei andersherum Q_1 zwischen F und Q_2 . Es kann nicht $\alpha_1 = \alpha_2$ gelten, da sonst nach dem ersten Teil $Q_1 = Q_2$. Ebenso wenig ist $\alpha_1 < \alpha_2$ möglich, da wir gesehen haben, dass dann Q_2 zwischen F und Q_1 läge. Es bleibt also nur $\alpha_1 > \alpha_2$. \square

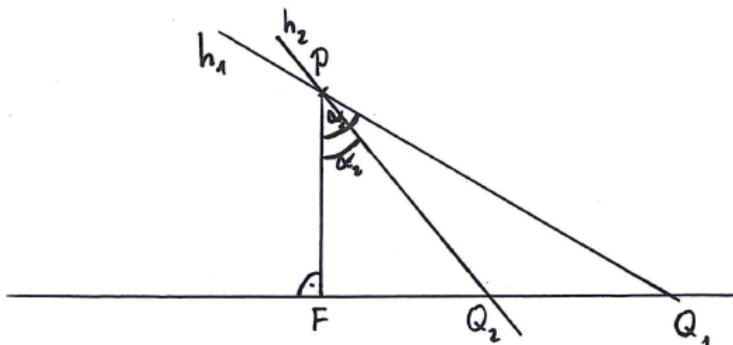
Eine fast parallele Aussage können wir uns für die Geraden h durch P , die g schneiden, überlegen:

Lemma 8.9. Sei g eine Gerade, P ein Punkt außerhalb von g , k das Lot von p auf g und F dessen Fußpunkt. Sei h_1 eine Gerade durch P , die g in einem Punkt Q_1 schneidet, und h_2 eine weitere Gerade durch P .

Sind α_1 und α_2 die kleineren Winkel zwischen k und h_1 bzw. h_2 , so gilt:

Ist $\alpha_2 \leq \alpha_1$, so schneidet auch h_2 die Gerade g . Ist Q_2 der Schnittpunkt, so gilt weiter:

1. $\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow d(F, Q_1) = d(F, Q_2)$.
2. $\alpha_1 > \alpha_2 \Leftrightarrow d(F, Q_1) > d(F, Q_2)$.



Beweis. Der Beweis geht ähnlich wie der letzte, deshalb hier nur der Umriss:

Ist $\alpha = 0^\circ$, so ist h genau das Lot k und schneidet g in F .

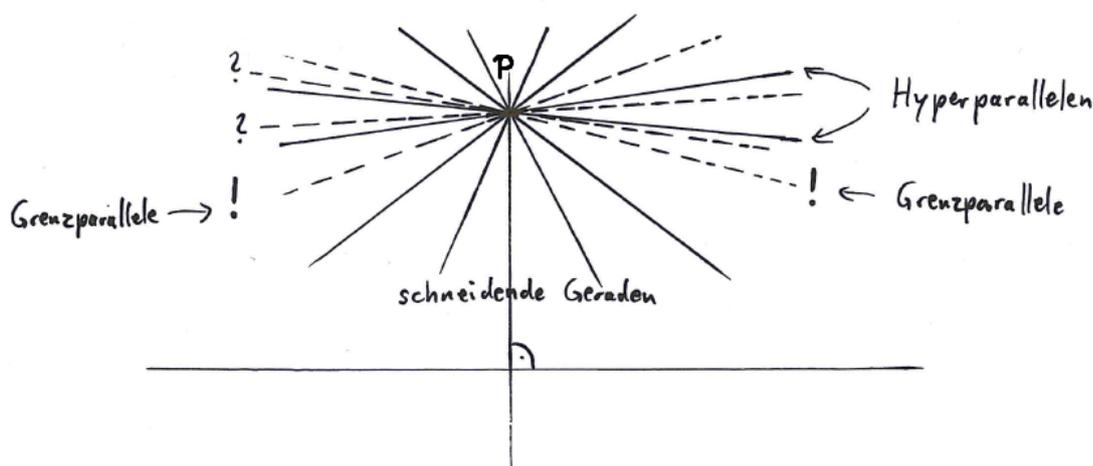
Bilden zwei Geraden gleiche Schnittwinkel in unterschiedliche Richtungen von k und schneidet eine davon g in einem Punkt Q , so schneidet aus Kongruenzgründen die andere g ebenfalls und der Schnittpunkt ist gleich weit von F entfernt wie Q .

Ist $\alpha_1 > 0^\circ$ der Winkel einer Geraden h_1 , die g in einem Punkt Q_1 schneidet und ist $0 < \alpha_2 < \alpha_1$, so schneidet die Gerade h_2 mit dem Winkel α_2 nach dem Satz von Pasch g ebenfalls und der Schnittpunkt Q_2 liegt näher an F als Q_1 . \square

9 Grenzparallelen

Sei wieder α der Winkel, den h mit dem Lot k auf g in P bildet.

Aus der letzten Aussage folgt insbesondere: Die Geraden durch P , die g schneiden, bilden alle einen kleineren Winkel in P als die Geraden, die zu g parallel sind.



Haben wir zu g eine Hyperparallelle h_1 mit Winkel α_1 zum Lot in P , so liegt die Vermutung nahe, dass auch alle Geraden, die Schnittwinkel zwischen α_1 und 90° haben, hyperparallel zu g sind. Die Vermutung wird sich als richtig herausstellen, den Beweis werden wir allerdings erst am Ende des Kapitels sehen.

Eine andere Tatsache haben wir jetzt aber bereits bewiesen: Es gibt keine „erste“ Hyperparallelle zu g durch P in dem Sinne, dass der Winkel α zum Lot in P kleiner ist als von allen anderen Hyperparallelen, da es keinen fernsten Punkt auf g gibt.

Ebensowenig kann es natürlich eine „letzte“ Gerade geben, die g schneidet, weil der größte Winkel α nach dem eben Gezeigten dem fernsten Schnittpunkt mit g entspricht.

Es folgt also, dass es zu jeder Geraden g durch jeden Punkt P außerhalb von g Geraden geben muss, die g nicht schneiden, also parallel sind, aber nicht hyperparallel. Wie viele das sind, können wir jetzt noch nicht sagen, aber zwei gehören auf jeden Fall dazu: Diejenigen, die auf beiden Seiten von k den kleinsten Winkel α aller Parallelen haben.

Definition 9.1. Sei g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf g liegt. Die zu g parallelen Geraden h durch P , die mit dem Lot k auf g in P den kleinsten Winkel bilden, nennen wir *Grenzparallelen* oder *asymptotische Parallelen* zu g (oder genauer: zu der entsprechenden Halbgeraden von g ab dem Lotfußpunkt F) in P .

Bemerkung 9.2. Wenn wir die Bilder wie eben zeichnen, dass g waagrecht liegt und P über g ist, so bezeichnen wir die beiden Grenzparallelen oft informal als die *linke* und

rechte Grenzparallele.

In jedem Fall kann man davon sprechen, dass zwei Grenzparallelen zu einer Geraden g durch irgendwelche Punkte *parallel in derselben Richtung* oder *parallel in verschiedene Richtungen* Richtungen sind, je nach den Halbgeraden von g , zu denen sie grenzparallel sind.

Lemma 8.9 sagt uns, dass der Winkelbereich, in dem die g schneidenden Geraden liegen, in beide Richtungen des Lotes k gleich groß sind. Wir können also die folgende Definition treffen:

Definition 9.3. Sei FP eine beliebige Strecke, g die Senkrechte durch F . Der spitze Winkel α , den die Grenzparallelen zu g durch P mit der Strecke FP in P bilden, heißt *Parallelitätswinkel* der Strecke FP .

Lemma 9.4. Sei g eine Gerade, P ein Punkt außerhalb von g und h eine Grenzparallele durch P . Wenn Q ein Punkt auf g ist und R ein Punkt auf h auf der Seite von P , auf der der Parallelitätswinkel liegt, so schneidet jede Gerade, die den Winkel $\angle QPR$ unterteilt, g .

Beweis. Der Winkel $\angle(QPR)$ ist ganz enthalten in den beiden Parallelitätswinkeln zum Lot durch P . Jede Gerade, die zum Lot einen kleineren Winkel als den Parallelitätswinkel bildet, schneidet g nach Definition. \square

Lemma 9.5. Sei g eine Gerade. Wenn h eine Grenzparallele zu g durch einen Punkt P ist, so gibt es eine Gerade k , die g und h so schneidet, dass die beiden Winkel auf einer Seite von k , die nicht Stufenwinkel sind, gleich groß sind.

Beweis. [Gan73], S. 85. \square

Lemma 9.6. Ist eine Gerade in einem ihrer Punkte eine der beiden Grenzparallelen zu einer anderen Geraden, so ist sie in jedem ihrer Punkte die Grenzparallele zu der Geraden in derselben Richtung.

Beweis. [Gan73], S. 88f. \square

Bemerkung 9.7. Wir können also davon sprechen, dass eine Gerade eine Grenzparallele einer anderen Geraden ist, ohne einen Punkt zu spezifizieren.

Lemma 9.8 (Symmetrie der Grenzparallelitätsrelation). *Ist eine Gerade h eine Grenzparallele zu einer anderen Geraden g , so ist g auch eine Grenzparallele von h . Die Richtungen sind durch die Projektionen auf die jeweils andere Gerade gegeben.*

Beweis. [Gan73], S. 90f. \square

Bemerkung 9.9. Wir können also bei einem Paar von Geraden davon sprechen, dass sie grenzparallel sind, ebenso wie wir davon sprechen, dass sie hyperparallel sind oder dass sie sich schneiden. In Diagrammen markieren wir das mit einer geschweiften Klammer an den „Enden“ der Geraden, die die Richtung der Grenzparallelität anzeigen.

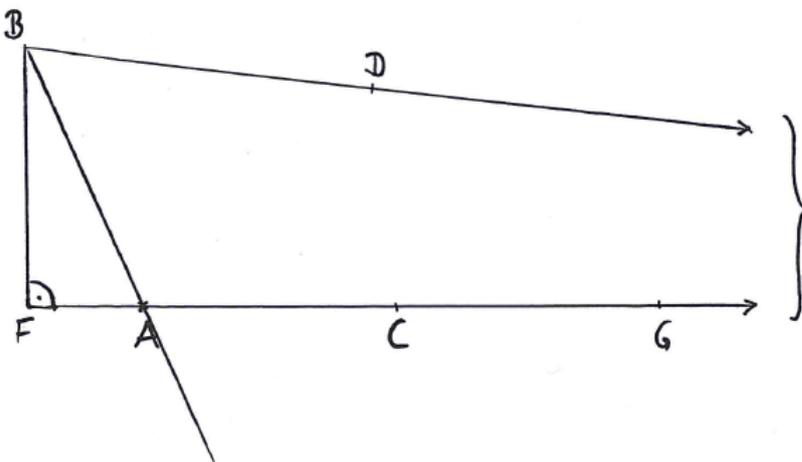
Lemma 9.10 (Transitivität der Grenzparallelitätsrelation). *Sind zwei Geraden grenzparallel zu einer dritten in derselben Richtung, so sind sie auch grenzparallel zueinander in eben der Richtung.*

Beweis. [Gan73], S. 91f. \square

Bemerkung 9.11. Durch die Eigenschaften der Grenzparallelitätsrelation können wir auf der hyperbolischen Ebene von einer *Richtung* im Sinne einer Äquivalenzklasse aller Geraden, die in der gleichen Richtung zueinander grenzparallel sind, sprechen, und diese mit griechischen Buchstaben, vor allem δ bezeichnen. Wir werden oft durch Notationsmissbrauch von einer Richtung δ wie von einem Punkt sprechen. Unter einer Geraden oder auch Halbgeraden $A\delta$ ist dann eine Gerade bzw. Halbgerade zu verstehen, die durch Punkt A geht und zu der Äquivalenzklasse δ gehören. Fast immer werden es zwei (Halb-)Geraden $A\delta$ und $B\delta$ sein, die gleichzeitig genannt werden. Dann ist letztere per definitione die eindeutige Grenzparallele durch den Punkt B zu der ersteren in der vorgegebenen Richtung. Ein Winkel $\angle AB\delta$ ist dann natürlich die Vereinigung der Halbgeraden $H]AB[$ und $H]A\delta[$ (ein Winkel $\angle A\delta B$ kann dagegen genauso wenig definiert werden wie eine Halbgerade $H]\delta A[$). Die Halbebene $H]AB\delta[$ ist schließlich zu verstehen als die von AB definierte Halbebene, in der ein Punkt (und damit nach Lemma 3.5 alle) der Halbgeraden $H]A\delta[$ liegt. Dass dies dieselbe Halbebene ist, in der auch alle Punkte der Halbgeraden $H]B\delta[$ liegen, zeigt das folgende Lemma:

Lemma 9.12. Sind $H]AC[$ und $H]BD[$ zwei grenzparallele Halbgeraden. Dann ist $H]ABC[= H]ABD[$.

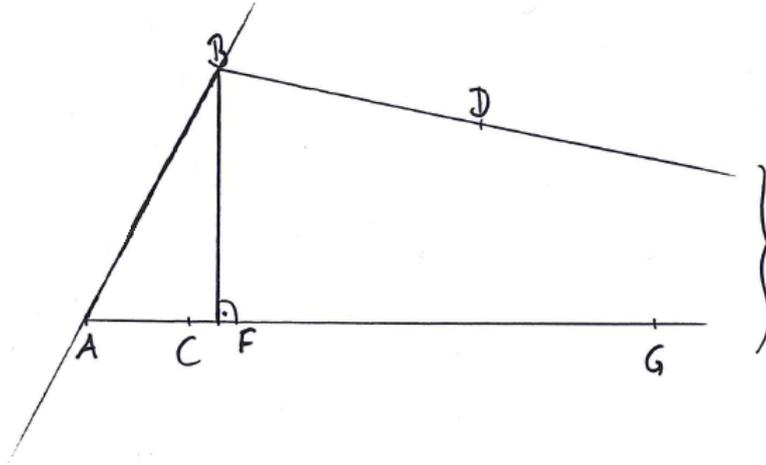
Beweis. Betrachte den Lotfußpunkt F von B auf die Gerade AC . Dass $H]AC[$ und $H]BD[$ grenzparallel sind, bedeutet jetzt, dass es eine Halbgerade $H]FG[$ auf der Geraden AC gibt, sodass BD die Grenzparallele durch B zu der Halbgeraden $H]FG[$ ist wie in der definierenden Konstruktion, und $H]AC[\subseteq H]FG[$ oder $H]FG[\subseteq H]AC[$. Es gibt jetzt drei Fälle: Wenn $H]AC[= H]FG[$, so sind wir fertig, denn nach Definition sind dann $H]BD[$ und $H]AC[= H]FG[$ auf derselben Seite vom Lot AB .



Wenn $H]AC[\subset H]FG[$, also $A \in H]FG[$, so ist $H]BA[$ zwischen $H]BF[$ und $H]BD[$, da wie eben $A \in H]BFD[$ und außerdem natürlich $A \in H]BDF[$ wegen der Parallelität. Insbesondere sind dann D und F auf verschiedenen Seiten von AB . Da dann weiter $\langle FAC \rangle$, sind auch C und F auf verschiedenen Seiten von AB . Damit sind dann C und D auf derselben Seite.

Ist andersherum $H]FG[\subset H]AC[$, so ist wieder wie eben $G \in H]BFD[$, und $\langle AFG \rangle$, also $A \in H]BFD[$. Damit ist $H]BF[$ zwischen $H]BA[$ und $H]BD[$ und somit $F \in H]ABD[$. Wegen $C \in H]AF[$ folgt $C \in H]ABD[$. \square

Bemerkung 9.13. Haben wir zwei verschiedene Geraden, so haben wir drei Möglichkeiten kennengelernt, wie sich diese verhalten können: Entweder schneiden sie sich oder es gibt



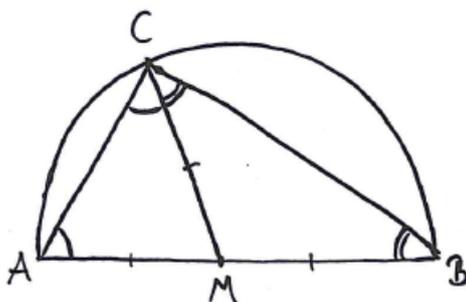
ein gemeinsames Lot oder sie sind in der speziellen Lage, die wir *grenzparallel* nennen. Wir werden später sehen, dass dies tatsächlich die einzigen drei Möglichkeiten sind; jede Gerade, die zu einer vorgegebenen parallel, aber nicht *grenzparallel* ist, hat mit ihr bereits ein gemeinsames Lot.

10 Dreiecke

Eine der ersten Tatsachen der hyperbolischen Geometrie, die wir bewiesen haben, ist, dass Dreiecke stets weniger als 180° Winkelsumme haben. Zwei Konsequenzen können wir gleich festhalten:

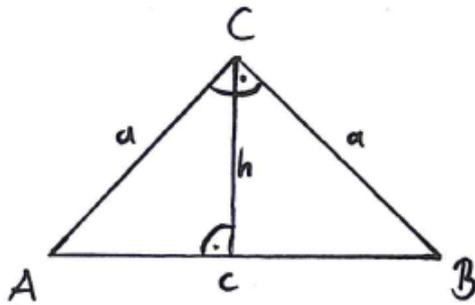
Korollar 10.1. *Der Satz des Thales gilt nicht: Der Winkel eines Dreiecks im Halbkreis ist spitz.*

Beweis.



Sei AB der Durchmesser des Kreises, M sein Mittelpunkt, und C die dritte Ecke des Dreiecks. Dann ist $d(A, M) = d(C, M) = d(B, M)$, da alle drei Ecken auf dem Kreis liegen. Es folgt, dass sowohl AMC als auch BMC gleichschenklige Dreiecke sind und damit jeweils gleiche Basiswinkel haben. Damit ist $\angle(ACB) = \angle(ACM) + \angle(MCB) = \angle(CAB) + \angle(ABC)$ und folglich gleich der Hälfte der Winkelsumme des Dreiecks ABC , also kleiner als 90° . \square

Korollar 10.2. *Der Satz des Pythagoras gilt nicht.*



Beweis.

Beweis durch Widerspruch. Angenommen, der Satz wäre gültig.

Wir konstruieren ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck ABC mit Hypotenuse AB . Offensichtlich wird diese durch das Lot von C halbiert (Kongruenzsatz SsW). Dabei entstehen zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke.

Sei nun h die Länge der Höhe, $a = d(B, C)$, $b = d(C, A)$ und $c = d(A, B)$. Wegen der Gleichschenkligkeit haben wir $a = b$. Der Satz des Pythagoras würde uns nun einerseits $2a^2 = c^2$ liefern. Andererseits hätten wir in jedem der kleineren Dreiecke $h^2 + (\frac{c}{2})^2 = a^2$. Zusammengenommen ergibt dies $h^2 = \frac{c^2}{2} - (\frac{c}{2})^2 = (\frac{c}{2})^2$. Die drei Punkte A , B und C lägen also auf dem Halbkreis um den Seitenmittelpunkt von AB mit Radius $\frac{c}{2}$, im Widerspruch zu Korollar 10.1. \square

Der von der Winkelsumme auf 180° fehlende Betrag bekommt jetzt einen Namen:

Definition 10.3. Sei ein Dreieck ABC mit den drei Winkeln α , β und γ gegeben. Dann heißt die positive Zahl $\delta(ABC) := 180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)$ der *Defekt* des Dreiecks.

Der Defekt hat eine sehr schöne Eigenschaft, die die Winkelsumme nicht hat: Er ist additiv in dem Sinne, dass ein Dreieck, das sich aus kleineren Dreiecken zusammensetzt, als Defekt die Summe der Defekte der Teildreiecke hat. In einem einfachen Spezialfall zeigt es das folgende Lemma:

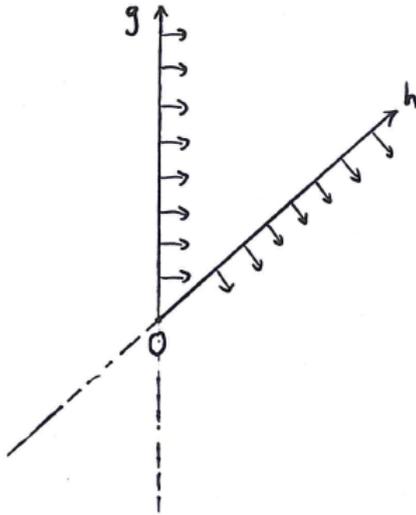
Lemma 10.4. *Wird ein Dreieck durch eine Gerade, die durch eine der Ecken verläuft, in zwei Teildreiecke geteilt, so ist der Defekt des gesamten Dreiecks gleich der Summe der Defekte der Teildreiecke.*

Beweis. [Gan73], S. 60. \square

Um die allgemeine Aussage beweisen, benötigen wir ein paar Vorüberlegungen: Eine beliebige Gerade AB teilt die Ebene in zwei Halbebenen. Eine der beiden Halbebenen bezeichnen wir als *rechts* von der Halbgeraden AB bzw. von der gerichteten Strecke AB , die andere als *links*.

Diese Begriffe sollen sich nun konform mit unseren Erwartungen verhalten:

1. Ist AB eine Halbgerade und C ein Punkt mit $\langle CAB \rangle$ oder $\langle ACB \rangle$, so ist das Gebiet rechts der Halbgeraden AB auch das Gebiet rechts der Halbgeraden CB .
2. Ist für eine von einem Punkt O ausgehende Halbgerade g das rechte Gebiet bereits definiert und läuft von O aus eine Halbgerade h in dieses Gebiet hinein, so nennen wir das Gebiet in Bezug auf h , das g enthält, links von h .



Durch zweimaliges Anwenden der Eigenschaft (2) erhalten wir, dass ein Gebiet, das rechts von der Halbgeraden AB liegt, links von der Halbgeraden BA liegt.

Außerdem müssen wir nur für eine einzige Halbgerade AB eine Festlegung treffen, für alle anderen Halbgeraden CD folgt es dann mit der folgenden Konstruktion: Ziehe die Halbgerade von A durch C . Ist diese selbst auf der Geraden AB , so sagt uns Eigenschaft (1), welches Gebiet rechts davon ist. Andernfalls können wir durch Eigenschaft (2) herausfinden, welches Gebiet rechts der Halbgeraden AC liegt. Wieder ist CD entweder auf derselben Geraden wie AC oder nicht und wie eben erfahren wir, wo rechts ist.

Diese Festlegung ist widerspruchsfrei: Wenn wir den Anfangspunkt der Halbgerade CD verschieben wie in Eigenschaft (1), so bleibt die Orientierung erhalten wie gefordert. Wenn wir weiter ausgehend von CD die Konstruktion andersherum durchführen, so erhalten wir für AB die ursprüngliche Orientierung. Und wenn wir schließlich die Konstruktion für eine dritte Halbgerade EF durchführen, so erhalten wir dasselbe Ergebnis, wenn wir die Orientierung zunächst für CD und davon ausgehend für EF festlegen wie wenn wir EF direkt von AB aus orientieren.

Die Punkte im Inneren eines Dreiecks ABC liegen nun alle entweder links oder rechts der drei Strecken AB , BC , CA . Im ersten Fall schreiben wir $\text{sgn}(ABC) = 1$, im letzteren Falle $\text{sgn}(ABC) = -1$.

Jetzt führen wir als technischen Kniff den *signierten Defekt* $[ABC]$ des Punkttupels (A, B, C) ein, der gleich $\text{sgn}(ABC)\delta(ABC)$ ist, falls A , B und C ein Dreieck bilden, und 0, falls die drei Punkte auf einer Geraden liegen.

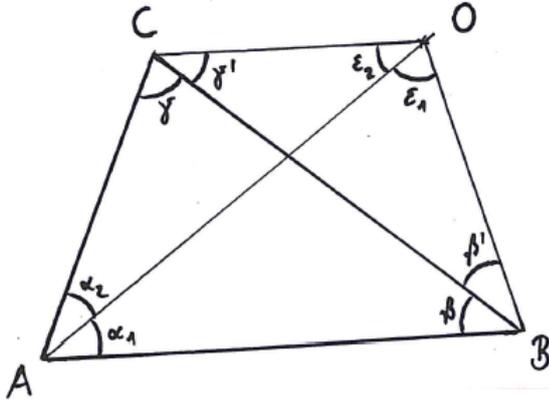
Mit dieser Festlegung gilt das folgende Lemma:

Lemma 10.5. *Sei ABC ein Dreieck, O ein Punkt außerhalb davon. Dann erfüllt der signierte Defekt die Beziehung*

$$[ABC] = [OAB] + [OBC] + [OCA].$$

Beweis. Vgl. [Hil62], S. 76.

Es gibt drei mögliche Lagen des Punktes O : Entweder liegt er für genau eine der drei Dreiecksseiten (oBdA BC) auf der anderen Seite als der letzte Dreieckspunkt (in diesem Fall A), oder für genau zwei Dreiecksseiten, oder er liegt genau auf der Verlängerung einer Dreiecksseite. Wir behandeln den ersten Fall, die anderen beiden gehen ähnlich.



Seien α , β und γ die Winkel des Dreiecks, $\alpha_1 = \angle OAB$, $\alpha_2 = \angle CAO$, $\varepsilon_1 = \angle AOB$, $\varepsilon_2 = \angle COA$, $\beta' = \angle CBO$ und $\gamma' = \angle OCB$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 [OAB] + [OBC] + [OCA] &= \operatorname{sgn}(OAB)(180^\circ - \alpha_1 - (\beta + \beta') - \varepsilon_1) \\
 &\quad + \operatorname{sgn}(OCA)(180^\circ - \alpha_2 - (\gamma + \gamma') - \varepsilon_2) \\
 &\quad + \operatorname{sgn}(OBC)(180^\circ - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \beta' - \gamma') \\
 &= \operatorname{sgn}(ABC)(180^\circ - \alpha_1 - (\beta + \beta') - \varepsilon_1) \\
 &\quad + \operatorname{sgn}(ABC)(180^\circ - \alpha_2 - (\gamma + \gamma') - \varepsilon_2) \\
 &\quad - \operatorname{sgn}(ABC)(180^\circ - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) - \beta' - \gamma') \\
 &= \operatorname{sgn}(ABC)(180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2) - \beta - \gamma) \\
 &= [ABC].
 \end{aligned}$$

□

Satz 10.6. *Wird ein Dreieck irgendwie in eine endliche Anzahl von Teildreiecken zerlegt, so ist der Defekt des Dreiecks gleich der Summe der Defekte der Teildreiecke.*

Beweis. [Hil62], S. 77.

Zu beachten ist, dass zunächst die Zerlegung so verfeinert werden muss, dass zwei Teildreiecke stets eine ganze Dreiecksseite gemeinsam haben. Das lässt sich aber in endlich vielen Schritten erreichen: Man arbeitet die inneren Strecken der Zerlegung der Reihe nach ab und fügt eine Ecktransversale überall dort ein, wo eine Dreiecksseite an zwei andere Dreiecksseiten grenzt. Durch die Ecktransversalen entstehen niemals neue Probleme, denn sie sind immer ganz den neugebildeten Teildreiecken gemeinsam. □

Damit erfüllt der Defekt auf natürliche Weise eine Forderung an ein Flächenmaß! Es gilt sogar:

Definition 10.7. Zwei Polygone heißen *zerlegungsgleich*, wenn sie beide in eine endliche Anzahl von Dreiecken zerlegt werden können, die paarweise kongruent sind.

Korollar 10.8. *Sind zwei Dreiecke zerlegungsgleich, so haben sie denselben Defekt.*

Um auch noch die Umkehrung zu beweisen, benötigen wir ein einfaches Hilfslemma:

Lemma 10.9. *Sind zwei Polygone zu einem dritten zerlegungsgleich, so sind sie auch untereinander zerlegungsgleich.*

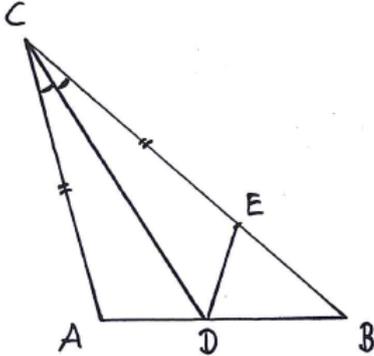
Beweis. [Hil62], S. 71. □

Satz 10.10. *Haben zwei Dreiecke denselben Defekt, so sind sie zerlegungsgleich.*

Beweis. [Gan73], S. 66f. □

Lemma 10.11. *Es gibt Dreiecke mit beliebig kleinem Defekt.*

Beweis.



Sei ABC ein Dreieck mit rechtem oder stumpfem Winkel bei A . Die Winkelhalbierende bei C trifft die Seite AB in einem Punkt D . Da der Winkel bei A der größte im Dreieck sein muss, ist BC die längste Seite. Finde also darauf den Punkt E mit $d(E, C) = d(A, C)$. Das Dreieck EDC ist nach Konstruktion kongruent zu ADC mit Kongruenzsatz SWS und liegt vollständig in BDC . Mit der Additivität des Defekts gilt $\delta(ADC) = \delta(EDC) < \delta(EDC) + \delta(EDB) = \delta(BDC)$ und $\delta(ABC) = \delta(ADC) + \delta(BDC)$, also $\delta(ADC) < \frac{1}{2}\delta(ABC)$.

Wir haben also ein Dreieck mit rechtem oder stumpfem Winkel bei A konstruiert, das höchstens halb so großen Defekt hat. Da das ursprüngliche Dreieck nicht weniger als 0° Winkelsumme, also 180° Defekt haben konnte, können wir in endlich vielen Schritten den Defekt unter jede vorgegebene Schranke drücken. □

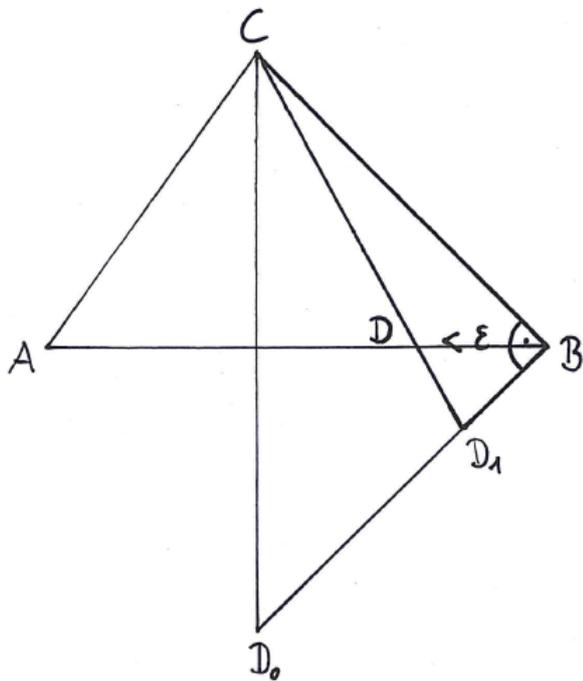
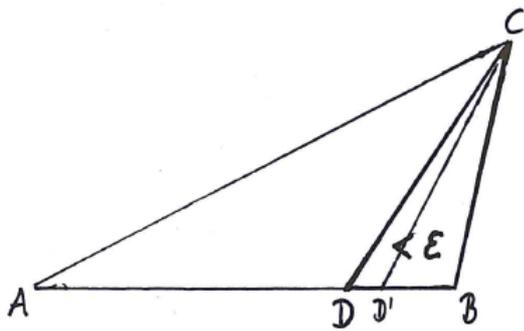
Satz 10.12. *Jede mögliche Flächeninhaltsfunktion für Dreiecke ist von der Form $K\delta$.*

Beweis. Zunächst beweisen wir eine Art Stetigkeit des Defekts:

Sei ABC ein Dreieck mit Defekt $\delta(ABC) = c$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es einen Punkt D auf der Strecke AB mit $c - \varepsilon < \delta(AD'C) < c$ für alle D' zwischen D und B . Ebenso gibt es einen Punkt E auf der Halbgeraden AB mit $c < \delta(AE'C) < c + \varepsilon$ für alle E' zwischen E und B .

Wir beweisen die erste Behauptung, die zweite folgt analog: Das Dreieck ABC hat bei B entweder einen rechten, einen stumpfen oder einen spitzen Winkel. In den ersten beiden Fällen wissen wir, dass wir wie im Beweis des vorigen Lemmas durch wiederholte Winkelhalbierung bei C ein Dreieck DBC mit $D \in AB$ erhalten können, dessen Defekt kleiner als ε ist. Dann ist D der gesuchte Punkt, denn mit der Additivität des Defekts erhalten wir für jeden Punkt D' zwischen D und B : $\delta(AD'C) = \delta(ABC) - (\delta(DBC) - \delta(DD'C)) \in]c - \varepsilon, c[$.

Ist der Winkel bei B spitz, so errichten wir darauf das Lot in die Halbebene, in der A liegt, und wählen einen beliebigen Punkt D_0 darauf. Dann hat das Dreieck D_0BC einen rechten Winkel und wir gehen vor wie im ersten Fall, um einen Punkt D_1 zwischen D_0 und B zu



finden, dass $\delta(D_1BC) < \varepsilon$. Nach dem Axiom von Pasch schneidet die Gerade AB die Seite D_1C des Dreiecks D_1BC in einem Punkt D . Wieder wegen der Additivität des Defekts ist $\delta(DBC) < \delta(D_1BC) < \varepsilon$. Der Rest des Arguments folgt dann wie oben.

Sei α eine beliebige Flächeninhaltsfunktion für Dreiecke. Seien nun ABC und DEF zwei beliebige Dreiecke. Die Behauptung des Satzes ist: $\frac{\alpha(ABC)}{\delta(ABC)} = \frac{\alpha(DEF)}{\delta(DEF)}$. Äquivalent dazu ist offensichtlich $\frac{\delta(ABC)}{\delta(DEF)} = \frac{\alpha(ABC)}{\alpha(DEF)}$.

Wir beweisen die Aussage zunächst für den Fall, dass $\frac{\delta(ABC)}{\delta(DEF)} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Die Stetigkeit des Defekts erlaubt uns, auf der Strecke AB Punkte $P_i (i \in \{0, \dots, m\})$ zu finden mit $P_0 = A$, $P_m = B$ und $\delta(P_{i-1}P_iC) = \frac{1}{m}\delta(ABC)$, und ebenso Punkte $Q_i (i \in \{0, \dots, n\})$ auf der Strecke DE mit $Q_0 = D$, $Q_n = E$ und $\delta(Q_{i-1}Q_iF) = \frac{1}{n}\delta(DEF)$.

Dann haben nach Konstruktion alle Teildreiecke $P_{i-1}P_iC$ und $Q_{i-1}Q_iF$ denselben Defekt. Sie sind also nach Satz 10.10 zerlegungsgleich und müssen denselben Flächeninhalt haben. Aufgrund der Additivität des Flächeninhalts folgt $\frac{\alpha(ABC)}{\alpha(DEF)} = \frac{m}{n}$.

Ist $\frac{\delta(ABC)}{\delta(DEF)}$ irrational, so nutzen wir die Stetigkeit des Defekts aus, um das Dreieck DEF von innen und von außen durch Dreiecke $DE'F$ mit $\frac{\delta(ABC)}{\delta(DE'F)} \in \mathbb{Q}$ zu approximieren. \square

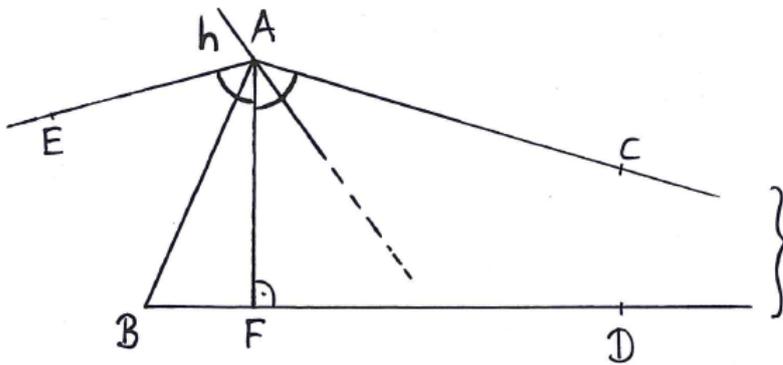
11 Dreiseite

Definition 11.1. Eine Figur aus einer Strecke AB und zwei grenzparallelen Halbgeraden mit Endpunkten A und B heißt *Dreiseit* mit Ecken A und B .

Die beiden Halbgeraden nennen wir die *äußeren Seiten*, die Strecke AB die *innere* oder *mittlere Seite*. Sind die äußeren Seiten die Halbgeraden $H[AC[$ und $H[BD[$, so nennen wir die Winkel $\angle BAC$ und $\angle ABD$ die *Winkel* des Dreiseits.

Lemma 11.2. Eine Gerade, die einen Winkel eines Dreiseits unterteilt, schneidet die gegenüberliegende äußere Seite.

Beweis.



Sei $\angle BAC$ der unterteilte Winkel. Fülle das Lot von A auf die Gerade BD , nenne den Fußpunkt F und trage an der anderen Seite des Lots an A den gleichen Winkel ab. Wir erhalten die zweite grenzparallele Halbgerade AE zur Geraden BD in A . Der Winkel $\angle BAC$ liegt vollständig im Winkel $\angle CAE$, da die Gerade AB ja eine die Gerade BD schneidende ist. Jede Halbgerade h , die ersteren unterteilt, unterteilt also auch letzteren. Jetzt gibt es zwei Fälle: Entweder ist h selbst auf dem Lot und schneidet dann in F oder sie unterteilt einen der beiden Winkel $\angle CAF$ und $\angle FAE$. Da dies aber die Parallelitätswinkel sind, muss h die Gerade BD schneiden. Um zu sehen, dass sie die Halbgeraden $H[BD[$ schneidet, beachte man, dass h in der Halbebene $H]ABC[$ liegt, zu der auch D gehört. \square

Korollar 11.3. Eine Gerade, die eine Seite eines Dreiseits schneidet und weder durch eine der Ecken geht noch grenzparallel zu den äußeren Seiten ist, schneidet noch eine zweite Seite.

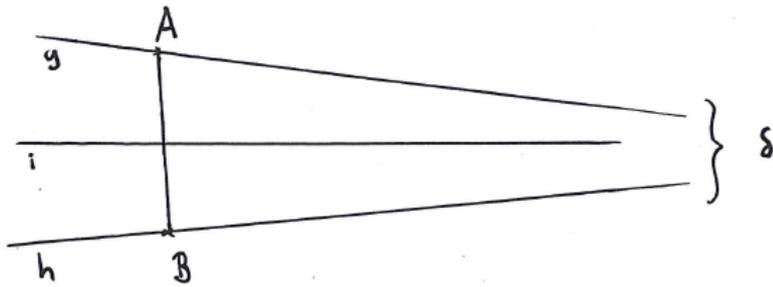
Beweis. [Gan73], S. 96f. \square

Korollar 11.4. Liegen zwei grenzparallele Geraden auf verschiedenen Seiten einer dritten Geraden, so ist diese grenzparallel in derselben Richtung.

Beweis. Seien g und h grenzparallel in Richtung δ und A und B je ein Punkt darauf. Weil A und B auf verschiedenen Seiten der dritten Geraden i liegen, schneidet diese ihre Verbindungsstrecke $S]Ab[$, also insbesondere das Dreiseit $AB\delta$. Da i weder g noch h schneidet, also keine der Ecken oder der äußeren Seiten, muss sie grenzparallel sein. \square

Lemma 11.5. Die Winkelsumme jedes Dreiseits ist kleiner als 180° .

Beweis. [Gan73], S. 92f. \square



Korollar 11.6. *Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist stets größer als der gegenüberliegende Innenwinkel.*

Beweis. [Gan73], S. 97. □

Lemma 11.7. *Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn ihre mittleren Seiten und beide Winkel übereinstimmen.*

Beweis. Seien AB und PQ die mittleren Seite der Dreiecke, $\angle CAB$ und $\angle RPQ$ ein übereinstimmendes Winkelpaar. Da die mittleren Seiten nach Voraussetzung gleich lang sind, gibt es zwei Bewegungen, die A auf P und B auf Q abbilden. Eine davon bildet $\angle CAB$ in die Halbebene $H]PQR[$. Weil es nur einen Winkel mit Schenkel PQ und zweitem Schenkel in der Halbebene $H]PQR[$ gibt, der kongruent ist zu $\angle CAB$, und ein Winkel nach Definition genau dann gleich groß ist wie ein anderer, wenn sie kongruent sind, muss das der Winkel $\angle RPQ$ sein. Entsprechendes gilt für den anderen Winkel. □

Satz 11.8 (Kongruenzsatz SW für Dreiecke). *Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn ihre mittleren Seiten und ein Winkel übereinstimmen.*

Beweis. [Gan73], S. 97f. □

Satz 11.9 (Kongruenzsatz WW für Dreiecke). *Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn ihre beiden Winkel übereinstimmen.*

Beweis. [Gan73], S. 98f. □

Jetzt haben wir das Rüstzeug, den versprochenen Beweis dafür durchzuführen, dass zwei Geraden, die parallel, aber nicht grenzparallel sind, ein gemeinsames Lot besitzen, also hyperparallel sind.

Satz 11.10. *Zwei Geraden, die parallel, aber nicht grenzparallel sind, haben ein gemeinsames Lot.*

Beweis. [KM81], S. 101ff. □

Außerdem können wir einen Satz beweisen, der die Entsprechung zu Satz 8.6 über den Abstand von Hyperparallelen bildet.

Satz 11.11. *Der Abstand von einer von zwei Grenzparallelen zu der anderen nimmt streng monoton ab in Richtung der Grenzparallelität. Er nimmt jeden beliebigen positiven Wert an.*

Beweis. [Gan73], S. 108ff. □

12 Parallelitätswinkel

Wir haben den Parallelitätswinkel einer Strecke AB definiert als den kleinsten Winkel, den eine Gerade h durch A mit der Strecke bilden kann, um die Gerade, die in B senkrecht auf AB steht, nicht mehr zu schneiden, also parallel zu sein.

Es liegt nahe, dass zwei Strecken, die die gleiche Länge haben, auch den gleichen Parallelitätswinkel haben, sonst könnte man kongruente Strecken daran unterscheiden. Dass diese Vermutung richtig ist, zeigen wir im nächsten Satz:

Satz 12.1. *Sind zwei Strecken AB und $A'B'$ gleich lang, so sind ihre Parallelitätswinkel gleich.*

Auch die Umkehrung gilt: Haben zwei Strecken dieselben Parallelitätswinkel, so sind sie gleich lang.

Beweis. [Gan73], S. 100f. □

Bemerkung 12.2. Damit können wir die *Parallelitätswinkelfunktion* Π definieren, die einer positiven Zahl einen Winkel, nämlich den Parallelitätswinkel einer Strecke von der gegebenen Länge, zuordnet. Sie ist natürlich von der Wahl der Längeneinheit und des Winkelmaßes abhängig. Es ist aus Gründen, die wir streifen werden, üblich, die Parallelitätswinkel statt in Grad im Bogenmaß, also im Intervall $[0, \pi]$, anzugeben.

Die zweite Aussage des Satzes ist die Injektivität der Funktion Π .

Eine natürliche Frage, die sich nun stellt, ist die nach ihrer Surjektivität. Die Antwort ist natürlich, dass keine Strecke einen Winkel von genau 0 haben kann, weil die Grenzparallele dann mit dem Lot zusammenfallen müsste. Ebenso wenig kann eine Strecke einen Parallelitätswinkel von $\frac{\pi}{2}$ haben, denn dann gäbe es durch einen Punkt in diesem Abstand zu einer Geraden nur eine parallele Gerade, im Widerspruch zum Hauptsatz der hyperbolischen Geometrie.

Die nächsten Resultate werden uns aber zeigen, dass *zwischen* 0 und $\frac{\pi}{2}$ alle Werte angenommen werden.

Satz 12.3 (Monotonie der Parallelitätswinkelfunktion). *Zu einer längeren Strecke gehört ein kleinerer Parallelitätswinkel.*

Beweis. [Gan73], S. 101f. □

Lemma 12.4. *Für die Parallelitätswinkelfunktion Π gilt:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Pi(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Beweis. [Per62], S. 35. □

Satz 12.5 (Stetigkeit der Parallelitätswinkelfunktion). *Die Parallelitätswinkelfunktion $\Pi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.*

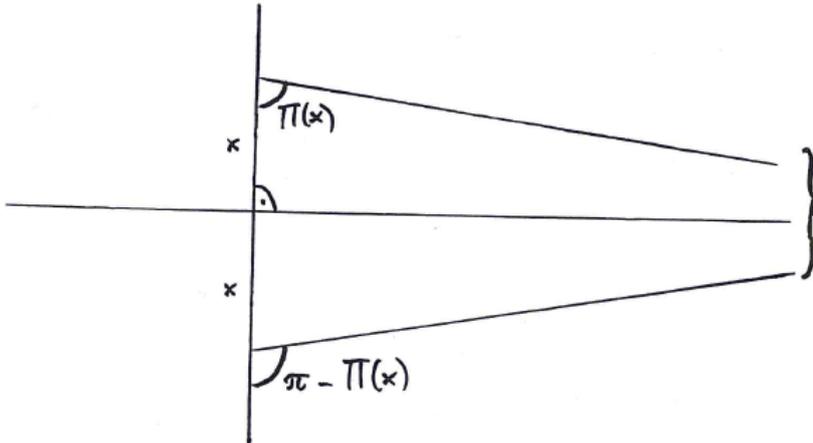
Beweis. [Per62], S. 35. □

Lemma 12.6. *Für die Parallelitätswinkelfunktion Π gilt:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Pi(x) = 0.$$

Beweis. [Per62], S. 35f. □

Bisher ist Π nur für positive reelle Zahlen definiert. Wir werden die Definitionsmenge im Folgenden Π auf negative reelle Zahlen erweitern, indem wir in der durch die Anschauung nahegelegten Weise $\Pi(-x) := \pi - \Pi(x)$ setzen.



Wegen der Symmetrie der Formel gilt diese auch für negative x . Schließlich gilt sie auch für $x = 0$, wenn wir in Übereinstimmung mit Lemma 12.4 $\Pi(0) := \frac{\pi}{2}$ definieren.

Die resultierende Funktion ist nun eine stetige, monoton fallende Bijektion von \mathbb{R} auf das offene Intervall $]0, \pi[$. Ihre Umkehrfunktion bezeichnen wir mit Δ .

Es ist unser nächstes großes Ziel, eine genaue Formel für die Funktion Π zu finden. Dafür beginnen wir mit den folgenden Rechenregeln für Π und Δ :

Lemma 12.7. *Sei $\triangle ABC$ ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse AB . Seien a und b die Längen der Katheten BC und CA , c die der Kathete und α und β die Größen der Winkel $\angle BAC$ bzw. $\angle ABC$. Dann gelten die folgenden Relationen:*

$$\begin{aligned} \Pi(c - \Delta(\beta)) - \Pi(c + \Delta(\beta)) &= 2\alpha. \\ \Pi(c - \Delta(\beta)) + \Pi(c + \Delta(\beta)) &= 2\Pi(\beta). \\ \Pi(\Delta(\alpha) + b) - \Pi(\Delta(\beta) + a) &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Beweis. [Per62], S. 37f. □

Satz 12.8 (Konvexität der Parallelitätswinkelfunktion). *Die Parallelitätswinkelfunktion ist im Bereich $]0, \infty[$ konvex, genügt also der Ungleichung*

$$\forall x \geq 0: \forall h > 0: \forall \theta \in]0, 1[: \Pi(x + \theta h) \leq \Pi(x) + \theta (\Pi(x + h) - \Pi(x)).$$

Beweis. [Per62], S. 68f. □

Korollar 12.9. *Die Parallelitätswinkelfunktion besitzt an jedem Punkt eine linksseitige und eine rechtsseitige Ableitung.*

Am Punkt $x = 0$ stimmen die links- und rechtsseitige Ableitung überein.

Beweis. Für $x > 0$ ist das eine allgemeine Aussage für konvexe Funktionen. Im konkreten Fall der Parallelitätswinkelfunktion beweist sie [Per62], S. 69ff. Dort wird auch die Existenz der rechtsseitigen Ableitung in $x = 0$ bewiesen.

Dass die Aussage für $x < 0$ gilt, folgt sofort aus der Definition von Π für solche Werte. Ebenso folgt daraus die Existenz der linksseitigen Ableitung in $x = 0$.

Die letzte Aussage folgt ebenso einfach:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Pi(-h) - \Pi(0)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\pi - \Pi(h)) - (\pi - \Pi(0))}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Pi(h) - \Pi(0)}{h}.$$

□

Ohne Beweis zitieren wir jetzt eine Aussage aus [Per62], die wir für das folgende zentrale Resultat benötigen:

Satz 12.10. Sei $\angle PAQ$ ein Winkel der Größe α , $c > 0$, $B(c)$ der Punkt auf $H]AP[$ mit $d(B, A) = c$ und $C(c)$ der Fußpunkt des Lotes durch $B(c)$ auf AQ . Für die Längen c und $a(c) := d(B, C)$ gilt dann:

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{a(c)}{c} = \sin \alpha.$$

Bemerkung 12.11. Wichtig ist, an dieser Stelle zu verstehen, dass die Funktion \sin ein mathematisches Objekt ist, das unabhängig von der Geometrie ist.

Es ist richtig, dass dieses Objekt in der euklidischen Geometrie genau das (konstante) Verhältnis von Gegenkathete zu Hypotenuse bei gegebenem Winkel beschreibt, aber diese Tatsache ist für die Definition der Funktion nicht erforderlich. Man kann sie ebensogut rein analytisch über ihre Potenzreihe definieren. Genau so geht man ja auch vor, wenn man in Funktionentheorie den Sinus komplexer Zahlen definiert, obwohl es in der euklidischen Geometrie (ebensowenig wie in der hyperbolischen) keine anschauliche Bedeutung dafür gibt.

Bemerkung 12.12. Der Beweis für diese Tatsache füllt bei [Per62] zwei ganzes Kapitel (S. 51-68), beruht aber im Wesentlichen auf den folgenden Beobachtungen:

Für jedes genügend kleine Dreieck ist die Winkelsumme beliebig nahe an 180° , also den Wert aus der euklidischen Geometrie (Vgl. dazu die ähnlichen Aussagen von Lemma 10.11 und Satz 10.12).

Über die Stetigkeit von Δ können wir eine ähnliche Aussage für die Verhältnisse von Strecken treffen. In genügend kleinen Konstruktionen ähneln die Eigenschaften für $\frac{a(c)}{c}$ also denen im Euklidischen.

Damit können wir dann für $\lim_{c \rightarrow 0} \frac{a(c)}{c}$ Eigenschaften nachweisen, die den Sinus eindeutig charakterisieren (u.a. Additionstheoreme).

Satz 12.13. Die Parallelitätswinkelfunktion erfüllt die Gleichung

$$\Pi(x) = 2 \arctan(\exp(-\kappa x))$$

mit $\kappa := \Pi'(0)$.

Bemerkung 12.14. κ ist hier der Skalierungsparameter, der die Wahl der Längeneinheit widerspiegelt. Die Wahl des Winkelmaßes verbirgt sich nicht nur in der Arcustangensfunktion, sondern auch in der Charakterisierung von κ . Nur bei Verwendung des Bogenmaßes erhält man genau die Ableitung bei 0.

Beweis. [Per62], S. 71ff. □

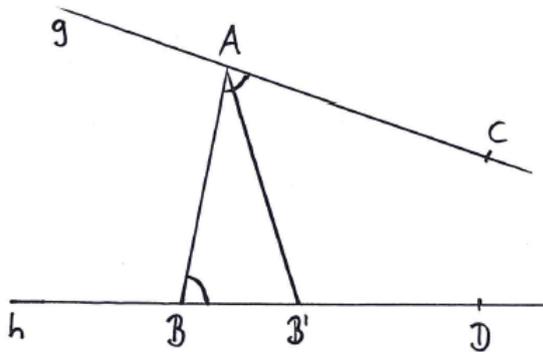
13 Kreise, Grenzkreise und Abstandslinien

Die Definition und eine erste Aussage für Kreise haben wir bereits in Kapitel 5 gesehen. Während in der euklidischen Geometrie Kreise allein den Status der interessantesten Kurven haben, müssen sie sich diesen in der hyperbolischen Geometrie mit zwei weiteren Kurventypen teilen. Um zu sehen, wie diese miteinander zusammenhängen, wollen wir eine alternative Charakterisierung von Kreisen herleiten:

Definition 13.1. Seien g und h Geraden. Dann nennen wir die Punkte $A \in g$ und $B \in h$ *korrespondierend*, wenn die Winkel $\angle BAC$ und $\angle ABD$ mit $C \in g$ und $D \in h$ und $H]ABC[= H]ABD[$ gleich groß sind.

Lemma 13.2. Wenn g und h Geraden sind und A ein Punkt von g , dann kann es höchstens einen Punkt in h geben, der zu A korrespondiert.

Beweis.



Betrachte zwei Punkte B und B' auf h , oBdA $\langle BB'D \rangle$. Betrachte dann das Dreieck ABB' . Der Winkel $\angle ABD$ ist kleiner als der Winkel $\angle AB'D$ nach dem schwachen Außenwinkelsatz. Der Winkel $\angle BAC$ ist dagegen größer als der Winkel $\angle B'AC$, denn er wird von der Halbgeraden AB' unterteilt. Wenn also bereits $\angle BAC = \angle ABD$, dann ist $\angle B'AC < \angle BAC = \angle ABD < \angle AB'D$. \square

Lemma 13.3. Sei P und A zwei Punkte. Der Kreis mit Mittelpunkt P und Radius $d(P, A)$ ist genau die Menge der zu A korrespondierenden Punkte auf den Geraden, die durch P gehen.

Beweis. Das folgt sofort aus dem Basiswinkelsatz. \square

Definition 13.4. Die Menge aller Geraden, die durch einen Punkt P gehen, bezeichnet man als *Geradenbüschel* durch P .

Die Geraden eines Büschels sind nach Definition schneidende. Da es daneben zwei andere Relationen zwischen Geraden gibt, nämlich Hyperparallelität und Grenzparallelität, gibt es neben den Geradenbüscheln zwei weitere kanonische Familien von Geraden in der hyperbolischen Geometrie: Die Menge der Geraden, die eine gegebene Gerade k als Lot haben, und die Geraden, die grenzparallel in einer vorgegebenen Richtung sind.

Definition 13.5. Die Menge aller Geraden, die eine gegebene Gerade k als gemeinsames Lot haben, bezeichnen wir als *Geradenkamm* durch k .

Definition 13.6. Die Menge aller Geraden, die grenzparallel in einer vorgegebenen Richtung δ sind, bezeichnen wir als *Geradenpinsel* mit Richtung δ .

Definition 13.7. Geradenbüschel, Geradenkämme und Geradenpinsel fassen wir unter Begriff *Geradenpaket* zusammen.

Diese Begriffe sind nicht gebräuchlich, aber, wie ich finde, treffend.

Es ist klar, dass zwei Geraden genau ein Geradenpaket definieren.

Außerdem ist festzustellen, dass zu jedem vorgegebenen Geradenbüschel, -kamm oder -pinsel jeder Punkt der Ebene zu einer der Geraden gehört und mit Ausnahme vom gemeinsamen Schnittpunkt P im Falle des Geradenbüschels zu genau einer. Für Geradenbüschel ergibt sich das aus der Tatsache, dass es stets genau eine Gerade AP gibt, falls $A \neq P$. Für einen Geradenkamm ist die Gerade das eindeutige Lot durch A auf k . Im Falle des Geradenpinsels ist es die eindeutige Grenzparallele durch den Punkt A .

Die natürliche Frage ist nun, welche Figuren sich ergeben, wenn wir die Menge aller zu einem Punkt A korrespondierenden Punkte auf einem der anderen Geradenpakete als einem Geradenbüschel bilden. Eine erste Tatsache können wir uns schnell klar machen:

Wenn A auf dem gemeinsamen Lot k eines Geradenkamms liegt, so korrespondieren alle weiteren Punkte auf dem gemeinsamen Lot, denn die Geraden des Kamms bilden nach Definition zu k die gleichen rechten Winkel. Es korrespondiert auch kein weiterer Punkt, denn für jede Gerade des Kamms haben wir ja bereits einen gefunden und nach Lemma 13.2 kann es keinen weiteren geben.

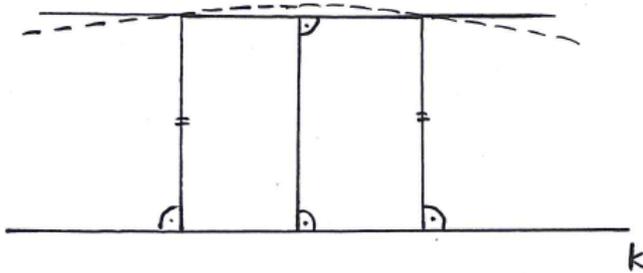
Im Fall eines Geradenkamms und $A \in k$ bilden die korrespondierenden Punkte also genau das gemeinsame Lot k .

Definition 13.8. Die Menge aller Punkte, die auf einer Seite einer gegebenen Geraden k liegen und zu ihr den Abstand d haben, nennen wir *Abstandslinie* mit Achse k und Abstand d .

In der euklidischen Geometrie wäre die entsprechende Menge eine Gerade, aber in der hyperbolischen kann sie das nicht sein, wie das nächste Lemma zum Ausdruck bringt:

Lemma 13.9. *Jede Gerade schneidet eine Abstandslinie in keinem, einem oder zwei Punkten.*

Beweis.



Sei k die Achse der Abstandslinie. Je zwei Punkte auf derselben Seite von k , die von k denselben Abstand haben, bilden mit ihren jeweiligen Lotfußpunkten ein Saccheri-Viereck und liegen dann nach Lemma 6.5 auf einer Hyperparallelen zu k mit dessen Mittellinie als gemeinsamem Lot. Jeder dritte Punkt auf dieser Geraden hat dann nach Satz 8.6 einen

größeren Abstand, wenn er weiter von der Mittellinie entfernt ist, und einen kleineren, wenn er näher daran ist. Daraus folgt, dass eine Gerade niemals mehr als zwei Schnittpunkte haben kann.

Für die Existenz von Geraden mit weniger als zwei Schnittpunkt betrachte zum Beispiel eine Hyperparallele zu k , deren Abstand beim gemeinsamen Lot größer bzw. gleich d ist. Wieder nach Satz 8.6 hat dann jeder andere Punkt einen größeren Abstand, gehört also nicht zur Abstandslinie. \square

Lemma 13.10. *Gegeben sei ein Geradenkamm durch k und $A \notin k$. Dann ist die Menge der zu A korrespondierenden Punkte auf den Geraden des Kamms genau die Abstandslinie mit Achse k und Abstand $d(A, k)$ auf der Seite von k , auf der A liegt.*

Beweis. Wir wissen bereits, dass wir die Punkte auf k nicht betrachten müssen, da kein Punkt auf k mit A korrespondieren kann, weil Korrespondenz von Punkten offensichtlich symmetrisch ist, und erst recht kein Punkt auf k auf der Abstandslinie mit Abstand $d(A, k) > 0$ liegen kann.

Ein Punkt, der auf der anderen Seite von k liegt, kann nach dem schwachen Außenwinkelsatz nicht mit A korrespondieren. Sei also B ein zweiter Punkt, der auf derselben Seite von k wie A liegt.

Jetzt gilt: Liegen A und B auf der Abstandslinie mit Mittellinie k und Abstand $d(A, k)$, so ist per definitionem $d(B, k) = d(A, k)$ und die Punkte A und B bilden mit ihren Lotfußpunkten auf k ein Saccheri-Viereck, in dem die Gipfelwinkel nach Lemma 6.3 gleich groß sind, sodass die Punkte A und B korrespondieren.

Ist andererseits B ein Punkt, der nicht auf der Abstandslinie liegt, so bilden A und B mit ihren Lotfußpunkten auf k ein Viereck vom Saccheri-Typ, das kein Saccheri-Viereck ist. Für solche wissen wir aber nach Satz 6.7, dass die Gipfelwinkel nicht gleich sind. Die Punkte A und B korrespondieren also nicht. \square

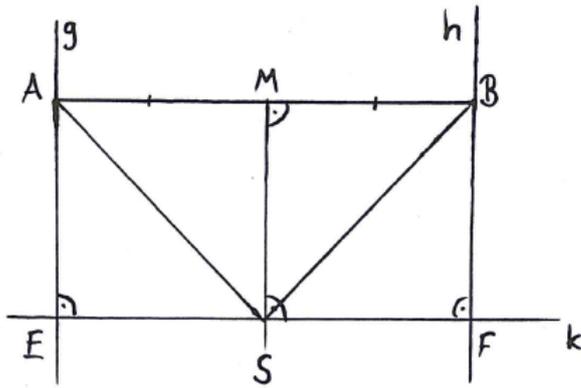
Bemerkung 13.11. Sowohl für Geradenbüschel als auch für Geradenkämme sieht man, dass es für jede Gerade darin einen korrespondierenden Punkt gibt, nämlich den mit dem passenden Abstand zu P bzw. k . Mit demselben Argument erkennt man, dass Korrespondenz transitiv ist. Für Geradenpinsel haben wir die erste Aussage in Lemma 9 auch schon bewiesen. Wir wollen nun aber noch eine Konstruktion für diesen Punkt angeben und schließlich auch die Transitivität zeigen.

Lemma 13.12. *Seien g und h zwei Geraden. Punkte $A \in g$ und $B \in h$ korrespondieren genau dann, wenn die Mittelsenkrechte der Strecke AB zu demselben Geradenpaket wie g und h gehört.*

Beweis. 1. Fall: g und h schneiden sich in einem Punkt P . Nach Lemma 4.24 geht die Mittelsenkrechte der Strecke AB genau dann durch P , wenn $d(A, P) = d(B, P)$, also A und B auf dem Kreis um P liegen und damit korrespondieren.

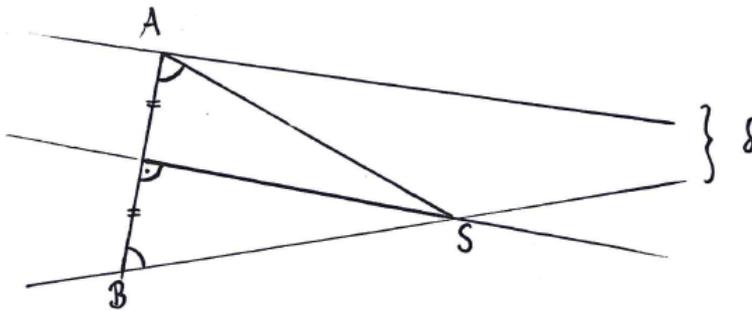
2. Fall: g und h sind hyperparallel mit gemeinsamem Lot k . Korrespondieren A und B , so ist $d(A, k) = d(B, k)$, die Punkte A und B bilden also mit ihren Fußpunkten ein Saccheri-Viereck. In diesem steht die Mittellinie sowohl senkrecht auf die Strecke AB , ist also deren Mittelsenkrechte, als auch auf die Basis k , gehört also zum Geradenkamm mit gemeinsamem Lot k .

Ist andersherum die Mittelsenkrechte im Geradenkamm mit gemeinsamem Lot k , so betrachte den Mittelpunkt M der Strecke AB , den Schnittpunkt S der Mittelsenkrechten mit k sowie die Lotfußpunkte E von A und F von B auf k . Die Dreiecke AMS und BMS sind kongruent nach Kongruenzsatz SWS, insbesondere sind die Winkel $\angle ASM$ und $\angle BSM$



sowie die Strecken AS und BS gleich groß. Da die k nach Voraussetzung senkrecht auf die Mittelsenkrechte steht, sind also auch die Winkel $\angle ASE$ und $\angle BSE$ gleich groß. Nach Kongruenzsatz WWS sind dann die rechtwinkligen Dreiecke AES und BFS kongruent, insbesondere also $d(A, E) = d(B, F)$, und A und B sind korrespondierende Punkte.

3. Fall: g und h sind grenzparallel in Richtung δ .



Sei M der Mittelpunkt von $S[AB]$. Ist die Mittelsenkrechte nicht grenzparallel zu den äußeren Seiten $A\delta$ und $B\delta$ des Dreiseits $AB\delta$, so muss sie nach Korollar 11.3 eine der beiden äußeren Seiten, oBdA $B\delta$ in einem Punkt S schneiden. Betrachte nun das Dreieck ABS . Da S auf der Mittelsenkrechten liegt, ist es gleichschenkelig. Damit ist $\angle BAS = \angle ABS = \angle AB\delta = \angle BA\delta$, also $S \in A\delta$. Damit wäre S Schnittpunkt der äußeren Seiten des Dreiseits im Widerspruch zu ihrer Grenzparallelität.

Ist andersherum die Mittelsenkrechte grenzparallel zu g und h , so ist offensichtlich $\angle BA\delta = \Pi(d(A, M)) = \Pi(d(B, M)) = \angle AB\delta$, also korrespondieren A und B . \square

Lemma 13.13. Seien g und h zwei Grenzparallelen in Richtung δ . Dann gibt es eine Gerade mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt darauf denselben Abstand zu g und h hat. Diese Gerade ist grenzparallel zu g und h in derselben Richtung.

Beweis. [Gan73], S. 117f. \square

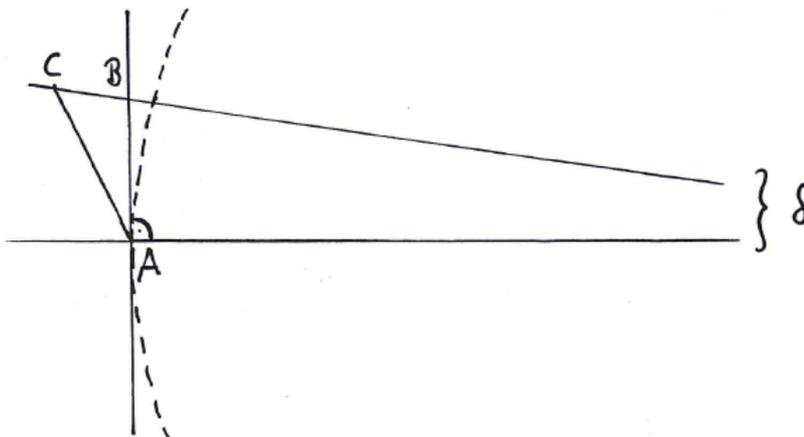
Lemma 13.14. Seien g und h zwei Grenzparallelen. Dann gibt es für jeden Punkt $A \in g$ einen korrespondierenden Punkt auf h .

Beweis. [Gan73], S. 118. \square

Definition 13.15. Sei ein Geradenpinsel gegeben. Die Menge der zu einem Punkt A korrespondierenden Punkte auf den Geraden des Pinsels bezeichnen wir als *Grenzkreis*.

Lemma 13.16. *Jede Gerade schneidet einen Grenzkreis in keinem, einem oder zwei Punkten.*

Beweis. Dass es höchstens zwei sind, zeigt [Gan73], S. 119f.



Sei nun g die Gerade, die in A senkrecht auf die Gerade des Pinsels steht. Gäbe es einen Punkt B auf g , der mit A korrespondiert, müssten die Winkel also bei B und A rechte sein. Dann wäre g aber ein gemeinsames Lot auf zwei grenzparallele Geraden, was natürlich ein Widerspruch ist. g schneidet den Grenzkreis also nur in A .

Genauer liegen alle Punkte des Grenzkreises außer A auf einer Seite dieser Geraden g , nämlich der, die die Strahlen $A\delta$ enthält: Wäre nämlich ein Punkt C des Grenzkreises auf der anderen Seite von g , so hätte das gleichwinklige Dreieck $AC\delta$ zwei stumpfe Winkel im Widerspruch zu Lemma 11.5.

Ist h schließlich eine Parallele zu der eben konstruierten Geraden g auf der anderen Seite von g , so kann also h den Grenzkreis nicht schneiden. \square

Bemerkung 13.17. Genauer kann man sehen: Jede Gerade, durch A , die mit g einen Winkel $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ bildet, schneidet den Grenzkreis in genau einem weiteren Punkt B , und $d(A, B) = 2\Pi(\alpha)$.

Definition 13.18. Wir nennen Kreise, Abstandslinien und Grenzkreise zusammenfassend *Zykel*.

Die Geraden des Geradenpakets, das einen Zykel definiert, bezeichnet man als *Radialen*. Eine Gerade, die in einem Punkt des Zykel senkrecht auf einem Radius steht, heißt *Tangente*.

Eine der verbindenden Eigenschaften von Zykeln ist die folgende:

Satz 13.19. *Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks ABC gehören stets einem Geradenpaket an.*

Insbesondere liegen drei Punkte A, B und C , die nicht auf einer Geraden liegen, auf einem Zykel.

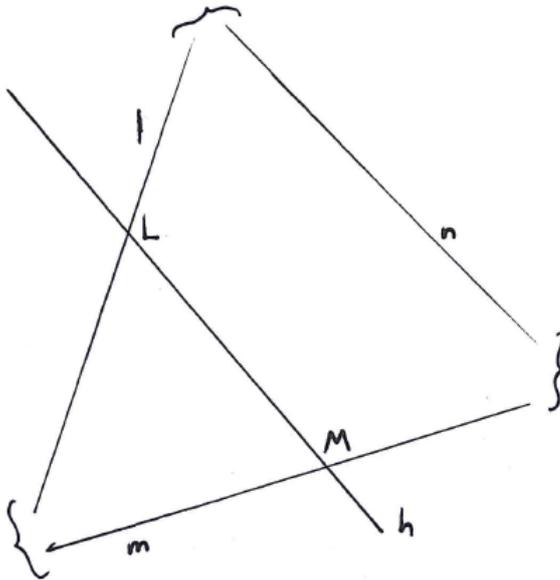
Beweis. Die entscheidende Aussage des Satzes ist, dass, wenn sich zwei Mittelsenkrechten eines Dreiecks in einem Punkt schneiden, auch die dritte durch diesen Punkt geht, wenn zwei hyperparallel mit gemeinsamem Lot sind, auch die dritte dieses Lot hat, und wenn zwei grenzparallel in einer Richtung sind, auch die dritte grenzparallel in dieser Richtung ist.

1. Fall: Zwei Mittelsenkrechten, oBdA die der Strecken AB und AC , schneiden sich in

einem Punkt P . Dann sind A und B korrespondierende Punkte auf den Geraden AP und BP und ebenso A und C auf den Geraden AP und CP , sodass wegen der Transitivität auch B und C korrespondierende Punkte auf BP und CP sind. Damit ist auch die Mittelsenkrechte der Strecke BC im Büschel von BP und CP , geht also auch durch P . In diesem Fall liegen die drei Punkte auf dem Kreis mit Mittelpunkt P .

2. Fall: Zwei Mittelsenkrechten, wieder oBdA die der Strecken AB und AC , sind hyperparallel mit gemeinsamem Lot k . Genau wie eben folgt, dass A und B ebenso wie A und C korrespondierende Punkte auf ihren jeweiligen Lotten auf k sind und mit der Transitivität, dass auch B und C korrespondieren und damit die Mittelsenkrechte der Strecke BC zum selben Geradenkamm gehört.

3. Fall: Keine zwei Mittelsenkrechten schneiden sich oder sind hyperparallel. Dann müssen sie also alle grenzparallel sein. Zu zeigen ist, dass sie es in derselben Richtung sind.



Dafür nutzen wir nun erst einmal Korollar 11.4: Wären die drei Mittelsenkrechten l , m und n nicht parallel in derselben Richtung, so könnte nicht eine von beiden zwischen den anderen beiden liegen, sondern je zwei würden in derselben Halbebene bezüglich der dritten liegen. Sei h nun eine Gerade, die l und m in den Punkten L und M schneidet. Da n in der Halbebene $H]lM[$, $H]LM[$ dagegen in $H]lM[$ liegt, kann n die Halbgerade $H]LM[$ nicht schneiden. Ebenso wenig ist ein Schnittpunkt mit der Halbgeraden $H]ML[$ möglich. Da L und M auf derselben Seite von n sind, gibt es auch keinen Schnittpunkt von n mit $S[LM]$. Zusammengefasst heißt das, dass es keine Gerade geben kann, die alle drei Mittelsenkrechten schneidet. Das ist aber ein Widerspruch zu Lemma 5.10 dass insbesondere die längste Seite des Dreiecks genau das tut. Es gehören also alle drei Mittelsenkrechten zu einem Geradenpinsel.

Sei nun δ die gemeinsame Richtung dieses Geradenpinsels. Auf den Geraden $A\delta$ und $B\delta$ dieses Pinsels sind dann A und B korrespondierende Punkte. Ebenso sind auch A und C korrespondierende Punkte auf den Geraden $A\delta$ und $C\delta$. Alle drei liegen also auf dem Grenzkreis durch A , der von dem Geradenpinsel der Mittelsenkrechten definiert wird. \square

Lemma 13.20 (Transitivität der Korrespondenz auf Grenzparallelen). *Seien g , h und i drei grenzparallele Geraden. Sind A und B korrespondierende Punkte von g und h und ebenso B und C von h und i , so sind auch A und C korrespondierende Punkte von g und i .*

Beweis. [Gan73], S. 120. □

Bemerkung 13.21. Aus diesem Lemma folgt, dass ein Grenzkreis für *jeden* seiner Punkte die Menge der zu diesem korrespondierenden Punkte auf den Geraden des Geradenpinsels ist.

Die Lemmata 5.17, 13.9 und 13.16 zeigen, dass kein Zykel eine Gerade ist. Dass die drei Zyklen aber auch untereinander verschieden sind, ist eine Konsequenz des folgenden Lemmas:

Lemma 13.22. *Zwei verschiedene Zyklen schneiden sich in höchstens zwei Punkten.*

Beweis. Wenn drei Punkte A , B und C auf einem Zykel liegen, dann sind sie nach Definition korrespondierende Punkte auf drei Geraden g , h und i eines Geradenpakets. Nach Lemma 13.12 gehören dann die Mittelsenkrechten zu demselben Geradenpaket.

Zwei Geraden, also erst recht die drei Mittelsenkrechten, definieren aber bereits eindeutig ein Geradenpaket. Durch das Geradenpaket ist der Zykel aber natürlich festgelegt. □

Korollar 13.23. *Es gibt Dreiecke ohne Umkreis.*

Beweis. Wähle drei beliebige Punkte A , B und C auf einer Abstandslinie oder einem Grenzkreis. Sie liegen nicht auf einer Geraden, bilden also ein Dreieck. Gleichzeitig liegen sie aber auch nicht auf einem Kreis. Das Dreieck ABC hat also keinen Umkreis. □

Bemerkung 13.24. Sei Γ eine Bewegung. Es ist offensichtlich, dass die Bilder von zwei Geraden unter Γ genau dann schneidend bzw. hyperparallel sind, wenn die Geraden es selbst sind. Damit müssen also auch die Bilder der Geraden genau dann grenzparallel sein, wenn es die Geraden selbst sind. Da die Richtung der Grenzparallelität über die Projektionen von Halbgeraden definiert sind, sieht man ein, dass auch die Bilder von drei Geraden unter Γ genau dann grenzparallel in dieselbe Richtung sind, wenn es die drei Geraden selbst sind. Das Bild eines Geradenpinsels unter einer Bewegung ist also wieder ein Geradenpinsel.

Andersherum folgt daraus auch schon, dass je zwei Geradenpinsel G und H mit Richtungen δ und ε kongruent in dem Sinne sein müssen, dass es eine Bewegung Γ gibt, sodass $\{\Gamma(g) | g \in G\} = H$. Wir können sogar für jede vorgegebene Halbgerade $A\delta \subset g \in G$ und jede vorgegebene Halbgerade $B\varepsilon \subset h \in H$ eine Bewegung finden, die $A\delta$ auf $B\varepsilon$ abbildet. Diese muss dann G auf einen Geradenpinsel abbilden, dem die Gerade h angehört und der die Richtung ε hat, und das ist nur H .

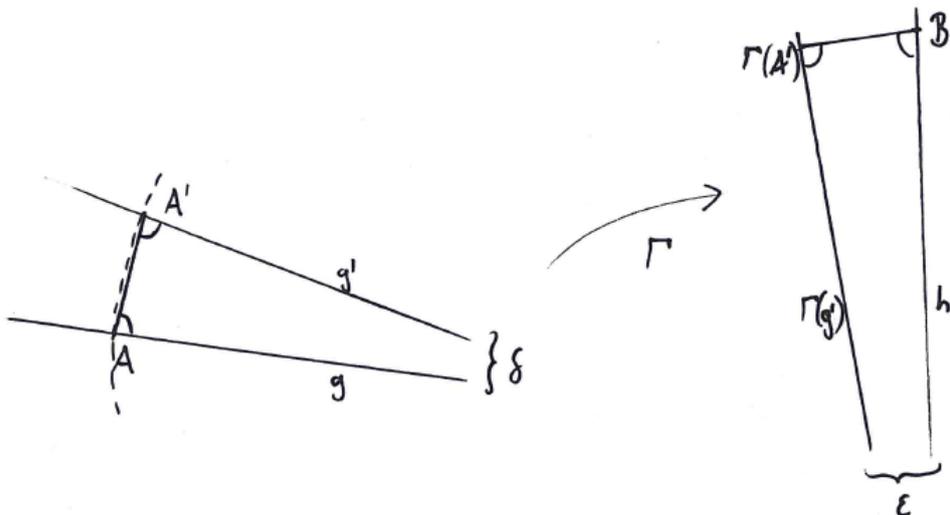
Eine zweite Beobachtung ist, dass die Bilder zweier Punkte auf zwei Geraden unter Γ genau dann korrespondieren, wenn es die Punkte selbst tun, da Winkel nach Definition gleich groß sind, wenn sie kongruent sind.

Zusammengenommen folgt:

Lemma 13.25. *Je zwei Grenzkreise sind kongruent.*

Beweis. Seien die Grenzkreise gegeben als die Menge der zu A bzw. B korrespondierenden Punkte auf zwei Geradenpinseln G und H mit Richtungen δ und ε . Dann gibt es eine Isomorphie, die G auf H abbildet und $A\delta$ auf $B\varepsilon$. Ist nun A' ein weiterer Punkt des ersten Grenzkreises, so ist er der zu A korrespondierende Punkt auf einer Geraden $g' \in G$. Damit ist dann $\Gamma(A')$ ein Punkt auf $\Gamma(g') \in H$, der mit $\Gamma(A) = B$ korrespondiert, also ein Punkt des zweiten Grenzkreises.

Dass auch jeder Punkt des zweiten Grenzkreises getroffen wird, folgt daraus, dass auch Γ^{-1} eine Bewegung ist. □



14 Grenzkreisbögen

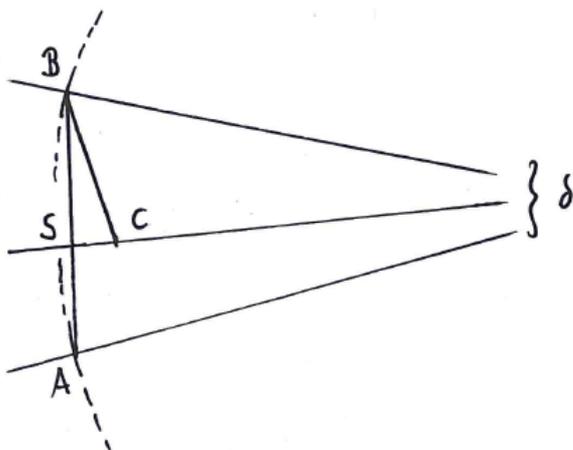
In diesem Abschnitt wollen wir uns mit Abschnitten von Grenzkreisen beschäftigen.

Definition 14.1. Seien A und B zwei Punkte auf einem Grenzkreis mit Richtung δ . Wir sagen, ein dritter Punkt C des Grenzkreises liegt *zwischen* A und B , wenn die Gerade $C\delta$ zwischen den Geraden $A\delta$ und $B\delta$ liegt.

Die Menge der Punkte des Grenzkreises, die zwischen A und B liegen, zusammen mit A und B selbst, nennen wir den *Grenzkreisbogen* von A nach B und schreiben dafür \widehat{AB} . Die Strecke AB nennen wir dann die entsprechende *Sehne*.

Lemma 14.2. Seien A und B zwei Punkte eines Grenzkreises mit Richtung δ und $C \in \widehat{AB} \setminus \{A, B\}$. Dann ist $C \in H]AB\delta[-$.

Beweis.

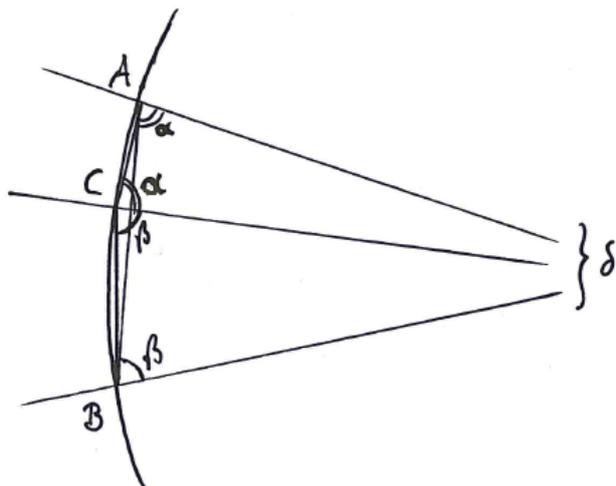


Betrachte die Sehne AB . Da C zwischen A und B liegt, muss die Gerade $C\delta$ sie in einem Punkt S schneiden. Es ist wegen dem schwachen Außenwinkelsatz für Dreiseite $\angle BS\delta > \angle BA\delta = \angle AB\delta$, also sind B und S schon einmal nicht korrespondierend, was wir natürlich schon wussten.

Wäre nun aber C in Richtung δ , so wäre nach dem schwachen Außenwinkelsatz für Dreiecke $\angle BC\delta$ noch größer als $\angle BS\delta$ und C und B könnten wieder nicht korrespondieren. \square

Lemma 14.3. Sind C und D Punkte eines Grenzkreisbogens \widehat{AB} , so ist $d(C, D) \leq d(A, B)$. Gleichheit gilt nur, wenn $C = A$ und $D = B$ oder andersherum.

Beweis.



Sei zunächst $D = B$. Betrachte das Dreieck $\triangle ABC$. Sei $\alpha = \angle \delta AC = \angle \delta CA$ der Winkel der korrespondierenden Punkte A und C , $\beta = \angle \delta BC = \angle \delta CB$ der der korrespondierenden Punkte B und C .

Es gilt natürlich $\angle ACB = \alpha + \beta > \alpha$, dagegen $\angle CAB < \alpha$. Nach Satz 5.8 über die Verhältnisse von Seiten und Winkeln im Dreieck ist also $d(A, B) > d(B, C)$.

Ist nun D ein anderer Punkt, oBdA zwischen C und B , so ist nach dem vorigen Argument $d(C, D) < d(C, B)$, also insbesondere $d(C, D) < d(A, B)$. \square

Lemma 14.4. Zwei Grenzkreisbögen sind kongruent, wenn es die entsprechenden Sehnen sind.

Ist eine Sehne AB kürzer als die andere, so ist der Grenzkreisbogen \widehat{AB} kongruent zu einem Teilbogen des anderen.

Beweis. Seien \widehat{AB} und \widehat{CD} die Grenzkreisbögen auf Grenzkreisen mit Richtung δ bzw. ε . Wir wissen bereits, dass wir die Grenzkreise, zu denen \widehat{AB} und \widehat{CD} gehören, mit einer Bewegung aufeinander abbilden können, sodass A auf C abgebildet wird. Natürlich können wir auch noch die Bewegung Γ wählen, dass $H]A\delta B[$ auf $H]C\varepsilon D[$ abgebildet wird. Wenn $S[AB]$ gleich lang ist wie $S[CD]$, so ist $\Gamma(B)$ ein Punkt des zweiten Grenzkreises, der von $C = \Gamma(A)$ denselben Abstand hat wie D . Nach Lemma 14.3 ist also $\Gamma(B) = D$.

Ist andererseits $d(A, B) < d(C, D)$, so ist $d(C, \Gamma(B)) < d(C, D)$, also kann D nicht auf dem Bogen $\widehat{C\Gamma(B)}$ liegen. Da aber für zwei Geraden, die grenzparallel zu einer dritten sind, stets eine der beiden zwischen den anderen und der dritten liegen muss, folgt also andersherum $\Gamma(B) \in \widehat{CD}$.

In jedem Fall werden natürlich genau die Punkte zwischen zwei Geraden auf die Punkte zwischen den Bildgeraden abgebildet, sodass auch $\Gamma(\widehat{AB}) = \Gamma(\widehat{A})\Gamma(B) = \widehat{C\Gamma(D)}$. \square

Bemerkung 14.5. Aus Lemma 13.12 folgt sofort, dass die Mittelsenkrechte jeder Sehne ein Radius ist. Das nutzen wir im folgenden Lemma:

Lemma 14.6. *Auf jedem Grenzkreisbogen gibt es einen eindeutigen Punkt, der diesen in zwei kongruente Teilbögen unterteilt. Dieser Punkt, genannt der Mittelpunkt des Grenzkreisbogens, liegt auf dem Radius, der senkrecht auf dem Mittelpunkt der entsprechenden Sehne steht.*

Beweis. [Gan73], S. 128. □

Lemma 14.7. *Wenn die Sehne eines Grenzkreises die Länge $2\Delta(45^\circ)$ hat, so sind die Tangenten an die Endpunkte grenzparallel zu dem Radius durch den Sehnenmittelpunkt in der entgegengesetzten Richtung zu der des Grenzkreises.*

Beweis. [Gan73], S. 128f. □

Definition 14.8. Wir nennen die Grenzkreisbögen über solchen Sehnen 45° -Bögen. Die kongruenten Hälften eines 45° -Bogens, die nach Lemma 14.6 existieren, nennen wir *Standardbögen*.

Bemerkung 14.9. Es ist klar, dass alle 45° -Bögen und damit auch alle Standardbögen kongruent zueinander sind.

Bemerkung 14.10. Aus Lemma 14.7 folgt sofort, dass die Tangente an einen Endpunkt einer Standardsehne grenzparallel zu dem Radius durch den anderen ist.

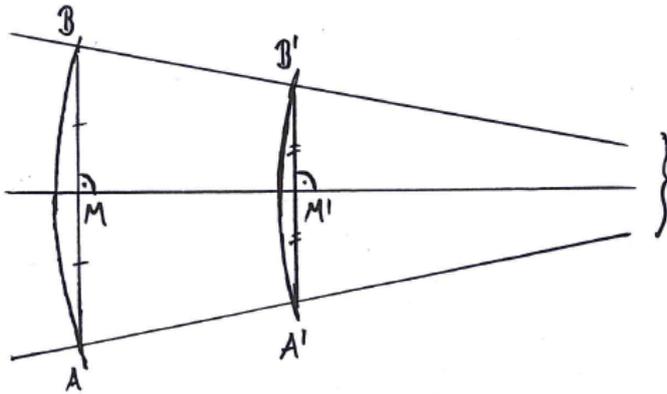
Definition 14.11. Grenzkreise auf demselben Geradenpinsel bezeichnen wir als *gleichgerichtete* Grenzkreise.

Wir sagen, zwei Grenzkreisbögen \widehat{AB} und $\widehat{A'B'}$ oder auch zwei Grenzkreissehnen AB und $A'B'$ auf zwei gleichgerichteten Grenzkreisen *korrespondieren*, wenn ihre Endpunkte je auf den gleichen Radien liegen.

Bemerkung 14.12. Achtung, diese Korrespondenz von Grenzkreisbögen hat außer dem Namen nichts mit der Korrespondenz von Punkten gemein! Natürlich sind A und B ebenso wie A' und B' korrespondierende Punkte auf ihren Radien wie bei allen Grenzkreisbögen.

Lemma 14.13. *Seien \widehat{AB} und $\widehat{A'B'}$ zwei korrespondierende Grenzkreisbögen und g eine Gerade. Gelten dann zwei der Aussagen - und die Punkte, von denen in ihnen die Rede ist, sind verschieden -, so folgen alle weiteren:*

1. g ist ein Radius der beiden Grenzkreise.
2. g geht durch den Mittelpunkt des Grenzkreisbogens \widehat{AB} .
3. g geht durch den Mittelpunkt des Grenzkreisbogens $\widehat{A'B'}$.
4. g geht durch den Mittelpunkt M der Sehne AB .
5. g geht durch den Mittelpunkt M' der Sehne $A'B'$.
6. g steht senkrecht auf der Sehne AB .
7. g steht senkrecht auf der Sehne $A'B'$.



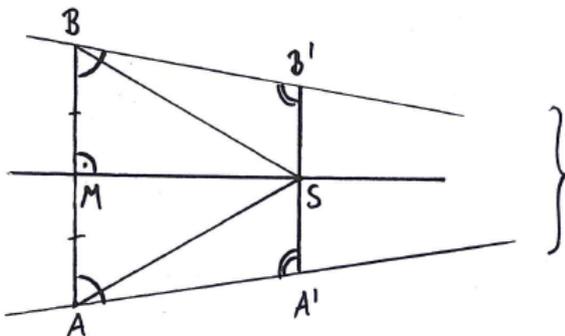
Beweis. Wir zeigen zunächst, dass unter der Voraussetzung 1. alle anderen Aussagen äquivalent sind.

Wir wissen, dass es zu jedem Punkt nur genau eine Gerade geben kann, die grenzparallel zu einer vorgegebenen, z.B. AA' , in einer vorgegebenen Richtung ist. Das bedeutet, dass der Radius eines Grenzkreises durch einen Punkt eindeutig bestimmt ist. Nach Lemma 14.6 liegen der Mittelpunkt eines Grenzkreisbogens und der entsprechenden Sehne auf demselben Radius.

Nach Lemma 13.12 ist die Mittelsenkrechte einer Sehne ein Radius und damit der einzige durch den Sehnenmittelpunkt. Wenn die Gerade g also durch einen der Sehnenmittelpunkte geht, dann steht sie senkrecht darauf.

Wäre andererseits g eine andere Gerade, die senkrecht auf einer der beiden Sehne steht, so sind g und die Mittelsenkrechte nach Konstruktion hyperparallel und nicht grenzparallel und g könnte kein Radius sein. Der einzige Radius, der senkrecht auf eine Sehne steht, geht also durch den Sehnenmittelpunkt.

Noch zu zeigen ist, dass der Radius, der durch M geht, auch durch M' geht. Wir wissen aber bereits, dass er senkrecht auf M steht. Sei S der Schnittpunkt mit $A'B'$ (wegen der Parallelität der Radien liegt S auf der Strecke $S[A'B']$). Die Dreiecke AMS und BMS sind kongruent mit Kongruenzsatz SWS, also sind die Winkel $\angle SAM$ und $\angle SBM$ ebenso wie die Strecken AS und BS gleich. Weil A und B wie auch A' und B' korrespondierende Punkte sind, sind die Winkel $\angle A'AB$ und $\angle B'BA$ wie auch die Winkel $\angle AA'B'$ und $\angle BB'A'$ gleich. Mit Kongruenzsatz WWS gilt dann insbesondere $d(A', S) = d(B', S)$, was zu zeigen war (und außerdem $d(A, A') = d(B, B')$, was wir uns merken wollen).



Was wir unterwegs gezeigt haben, ist natürlich, dass der Radius durch einen der vier Mittelpunkte auch durch alle anderen geht. Das bedeutet aber im Umkehrschluss, dass eine Gerade g , die durch zwei der vier Mittelpunkte geht, natürlich genau dieser Radius ist

und durch alle anderen geht sowie senkrecht auf den beiden Sehnen steht. Aus je zwei der Aussagen 2. - 5. folgen also ebenfalls alle anderen.

Da das Lot durch einen Punkt auf eine Gerade eindeutig ist, folgen auch aus einer der beiden Aussagen 6. und 7. sowie einer der Aussagen 2. - 5. alle weiteren.

Das Letzte, was zu tun verbleibt, ist es, aus 6. und 7. die anderen Aussagen zu folgern. Eine Gerade, die aber senkrecht sowohl auf AB als auch auf $A'B'$ steht, ist aber ein gemeinsames Lot, und auch dieses ist eindeutig nach Lemma 8.4. \square

Bei dem Kongruenzargument des letzten Beweises ist gleich noch eine Aussage abgefallen, die wir jetzt als Lemma konstatieren wollen:

Lemma 14.14. *Sind \widehat{AB} und $\widehat{A'B'}$ zwei korrespondierende Grenzkreisbögen, so gilt $d(A, A') = d(B, B')$.*

Definition 14.15. Seien zwei gleichgerichtete Grenzkreise gegeben. Ist g ein Radius, der die Bögen in A und A' schneidet, so bezeichnen wir $d(A, A')$ als den *Abstand* der beiden Grenzkreise.

Bemerkung 14.16. Lemma 14.14 zeigt uns, dass diese Größe nicht von der Wahl des Radius abhängt.

Lemma 14.17. *Seien \widehat{AB} und $\widehat{A'B'}$ zwei korrespondierende Grenzkreisbögen. Wird \widehat{AB} durch Radien in n kongruente Teilbögen zerlegt, so zerlegen diese Radien auch $\widehat{A'B'}$ in n kongruente Teilbögen.*

Beweis. Seien $(A_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ die Schnittpunkte der Radien mit \widehat{AB} ($A_0 = A$ und $A_n = B$) und $(A'_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ die entsprechenden mit $\widehat{A'B'}$.

Wir betrachten jetzt einen Teilbogen $\widehat{A_i, A_{i+2}}$ von \widehat{AB} . Dieser wird durch den Radius durch A_{i+1} in kongruente Teilbögen zerlegt. Nach Lemma 14.13 zerlegt dieser Radius nun auch den Teilbogen $\widehat{A'_i, A'_{i+2}}$ in kongruente Teilbögen.

Der Reihe nach sehen wir also, dass je zwei benachbarte Teilbögen $\widehat{A'_i, A'_{i+1}}$ und $\widehat{A'_{i+1}, A'_{i+2}}$ kongruent sind, also alle. \square

Lemma 14.18. *Zwei korrespondierende Grenzkreissehnen sind niemals gleich lang: Diejenige in Richtung der Grenzparallelität ist stets kürzer als die andere.*

Zu einer Sehne findet sich stets eine korrespondierende mit beliebig vorgegebener Länge.

Beweis. [Gan73], S. 132f. \square

Bisher haben wir zwar die Längen von Strecken als die Abstände ihrer Endpunkte betrachtet. Im folgenden wollen wir aber auch mit den Längen von Grenzkreisbögen arbeiten und brauchen dafür eine Definition von Kurvenlänge.

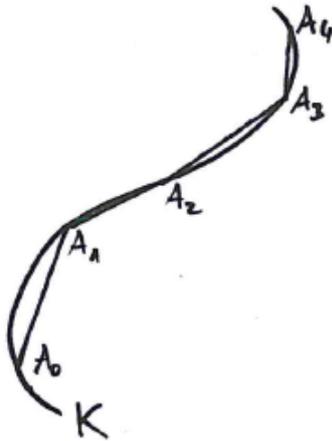
Wir nutzen dafür aus, dass die Abstandsfunktion eine Metrik ist, sodass wir auf der Ebene eine Topologie haben und von stetigen Abbildungen sprechen können.

Definition 14.19. Als *Kurve* bezeichnen wir das Bild einer stetigen, injektiven Abbildung ϕ von einem Intervall in die Ebene. Für jede Kurve gibt es eine Relation \prec mit

$$A \prec B \Leftrightarrow \phi^{-1}(A) < \phi^{-1}(B).$$

Ist K eine Kurve, so setzen wir als ihre *Länge*

$$l(K) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n d(A_{i-1}, A_i) \mid A_0 \prec \dots \prec A_n \right\}.$$



Bemerkung 14.20. Ein paar Eigenschaften folgen sofort aus der Definition:

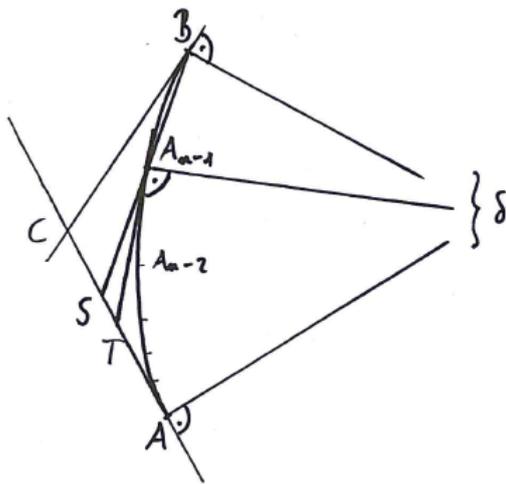
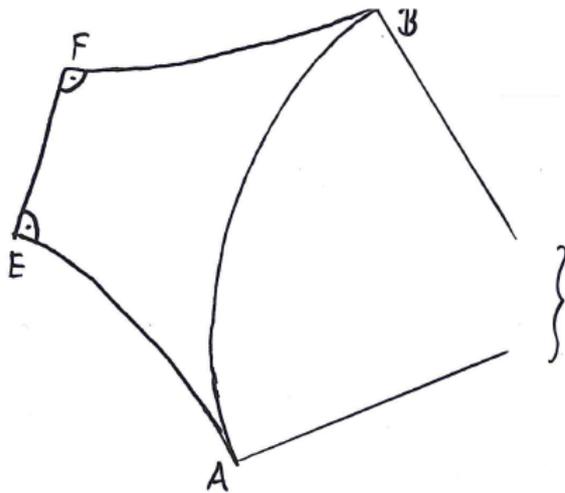
1. Die Länge einer Kurve, die mehr als einen Punkt hat, ist positiv, aber nicht unbedingt endlich.
2. Sind $A_0 \prec \dots \prec A_n$ Punkte einer Kurve K , so sind die Teilmengen $\{X \in K \mid A_{i-1} \prec X \prec A_i\} \cup \{A_{i-1}, A_i\}$ selbst wieder Kurven und ihre Längen addieren sich genau zu der Länge der gesamten Kurve auf.
3. Sind zwei Kurven kongruent, so ist ihre Länge gleich.
4. Ist die Kurve K Bild eines abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$, so ist $l(K) \geq d(\phi(a), \phi(b))$ und nur dann gleich, wenn die Kurve gleich der Strecke $S[\phi(a), \phi(b)]$ ist.
5. Nimmt man eine andere Längeneinheit, d.h. skaliert man alle Abstände mit einem konstanten Faktor k , so wird auch die Länge aller Kurven mit k skaliert.

Bemerkung 14.21. Ein Grenzkreisbogen \widehat{AB} ist eine Kurve, z.B. als Bild der Abbildung $[\Pi(\frac{d(A,B)}{2}), \frac{\pi}{2}] \rightarrow \widehat{AB}$, die jedem Winkel α den zweiten Schnittpunkt des Grenzkreises mit der Geraden, die den Radius durch B in B im Winkel α schneidet, zuordnet. Die Stetigkeit von ϕ ergibt sich dann aus der Stetigkeit der Funktion Δ und der Dreiecksungleichung. Für die Länge von Grenzkreisbögen kann man noch ein paar mehr Aussagen treffen:

Satz 14.22. Die Länge jedes Grenzkreisbogens \widehat{AB} ist beschränkt. Außerdem gibt es beliebig kurze Grenzkreisbögen mit festgelegtem Anfangspunkt.

Beweis. Betrachte nämlich die Tangenten in A und B . Es gibt drei Möglichkeiten: Sie können sich in einem Punkt C schneiden, ein gemeinsames Lot mit Fußpunkten E und F haben oder grenzparallel sein. Im letzteren Fall handelt es sich um einen 45° -Bogen, den wir in zwei Standardbögen unterteilen können. Wenn deren Länge endlich ist, ist es seine auch. Die anderen beiden Fälle funktionieren im Großen und Ganzen gleich, wir beschränken uns daher auf den technisch etwas einfacheren Fall eines gemeinsamen Schnittpunkts. Da die Kurvenlänge als Supremum über die Länge aller möglichen Streckenzüge definiert ist, müssen wir natürlich nur zeigen, dass wir eine Schranke für all diese finden, die kleiner ist als unendlich. Anschaulich ist die naheliegendste Schranke die Länge $d(A, C) + d(C, B)$. Das wollen wir jetzt zeigen.

OBdA können wir annehmen, dass der erste Punkt des Streckenzugs A und der letzte B ist, sonst könnten wir diese hinzufügen und damit die Gesamtlänge nur erhöhen. Wir benutzen



dann vollständige Induktion über die Anzahl $n+1$ der Stützpunkte $A = A_0 \prec \dots \prec A_n = B$ des Streckenzugs. Für $n = 1$ gilt nach der Dreiecksungleichung $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$. Sei jetzt für jeden Grenzkreisbogen $\widehat{A'B'}$ mit sich in C' schneidenden Tangenten in den Endpunkten und n beliebige Stützpunkte $A' = A'_0 \prec \dots \prec A'_{n-1} = B'$ bereits $\sum_{i=1}^{n-1} d(A'_{i-1}, A'_i) \leq d(A', C') + d(C', B')$ bekannt und $A = A_0 \prec \dots \prec A_n = B$ ein Streckenzug mit einem Stützpunkt mehr. Nach Lemma 14.2 liegt A_{n-1} in $H]AB\delta[$. Weil AC und BC nach Voraussetzung Tangenten an den Grenzkreis sind, folgt wie im Beweis von Lemma 13.16, dass $A_{n-1} \in H]ACB[$ und $A_{n-1} \in H]BCA[$, also $A_{n-1} \in \text{In}(\Delta ABC)$. Nach dem Satz von Pasch schneidet die Gerade BA_{n-1} die Seite AC in einem Punkt S . Wegen der Dreiecksungleichung gilt $d(S, B) \leq d(S, C) + d(C, B)$, also $d(A, S) + d(S, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$. Jetzt ist aber $\angle SA_{n-1}\delta = 180^\circ - \angle BA_{n-1}\delta > 90^\circ > \angle AA_{n-1}\delta$. Wieder nach dem Satz von Pasch schneidet die Tangente an A_{n-1} also die Seite AS des Dreiecks $AA_{n-1}S$ in einem Punkt T . Wieder mit der Dreiecksungleichung gilt $d(A, T) + d(T, A_{n-1}) \leq d(A, S) + d(S, A_{n-1})$. Jetzt bilden aber $A_0 \prec \dots \prec A_{n-1}$ einen Streckenzug mit n Stützstellen und die Tangenten in A_0 und A_{n-1} schneiden sich in T . Damit ist nach Induktionsvoraussetzung

$\sum_{i=1}^{n-1} d(A_{i-1}, A_i) \leq d(A, T) + d(T, A_{n-1})$, also

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d(A_{i-1}, A_i) &\leq d(A, T) + d(T, A_{n-1}) + d(A_{n-1}, B) \\ &\leq d(A, S) + d(S, A_{n-1}) + d(A_{n-1}, B) \\ &= d(A, S) + d(S, B) \\ &\leq d(A, C) + d(C, B). \end{aligned}$$

Für die zweite Aussage des Satzes müssen wir uns nur daran erinnern, dass man jeden Grenzkreisbogen in zwei kongruente Hälften teilen kann, die dann natürlich halb so lang sind. Durch wiederholtes Halbieren der Hälfte, die den festgelegten Anfangspunkt hat, kann man die Länge unter jede Schranke drücken. \square

Korollar 14.23. Seien A und B Punkte auf einem Grenzkreis, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen von weiteren Punkten auf diesem Grenzkreis mit $d(A_n, A) \rightarrow 0$ und $d(B_n, B) \rightarrow 0$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} l(\widehat{A_n B_n}) = l(\widehat{AB})$.

Beweis.



Sei ε gegeben und \widehat{AC} ein Grenzkreisbogen mit Länge $l(\widehat{AC}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Es gibt nach Voraussetzung ein $N_A \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n_A \geq N$ $d(A, A_n) \leq d(A, C)$. Dann ist wegen Lemma 14.4 auch $l(\widehat{AA_n}) \leq l(\widehat{AC}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Entsprechend können wir für B vorgehen und erhalten insgesamt ein $N = \max(N_A, N_B)$, sodass für alle $n \geq N$

$$|l(\widehat{A_n B_n}) - l(\widehat{AB})| \leq l(\widehat{AA_n}) + l(\widehat{BB_n}) \leq \varepsilon.$$

\square

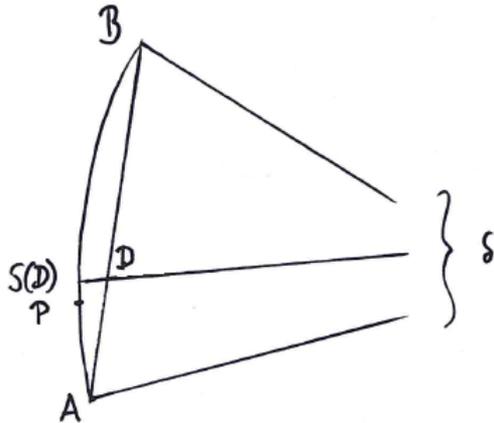
Korollar 14.24. Für jeden Grenzkreisbogen \widehat{AB} und jede reelle Zahl $\lambda \leq l(\widehat{AB}) =: L$ gibt es genau einen Punkt $C \in \widehat{AB}$ mit $l(\widehat{AC}) = \lambda$.

Beweis.

Betrachte die Sehne AB . Für jeden Punkt X darauf \widehat{AB} gibt es einen Schnittpunkt $S(X)$ der Radien $X\delta$ mit dem Grenzkreis, und offensichtlich ist $d(A, X) \geq d(A, Y) \Leftrightarrow l(\widehat{AS(X)}) \geq l(\widehat{AS(Y)})$. Sei nun D der erste Punkt auf der Sehne, für den $l(\widehat{AS(D)}) \geq \lambda$, d.h. $D := f_A^{-1}(\inf\{x \in [0, d(A, B)] \mid l(\widehat{AS(f_A^{-1}(x))}) \geq \lambda\})$.

Angenommen, $l(\widehat{AS(D)}) > \lambda$. Da es beliebig kurze Grenzkreisbögen gibt, gäbe es dann insbesondere einen Punkt $P \in \widehat{AS(D)}$ mit $l(\widehat{PS(D)}) < l(\widehat{AS(D)}) - \lambda$. Für diesen Punkt wäre aber $\lambda \geq l(\widehat{AP}) \geq l(\widehat{AS(D)})$ im Widerspruch zur Wahl von D .

Setze also $C := S(D)$. \square



Wir werden jetzt zwei wichtige Resultate über das Verhältnis von Grenzkreisbogenlängen beweisen. Setzen wir zwei korrespondierende Grenzkreise in ein Verhältnis, so einigen wir uns darauf, damit stets das Verhältnis des größeren zum kleineren zu meinen.

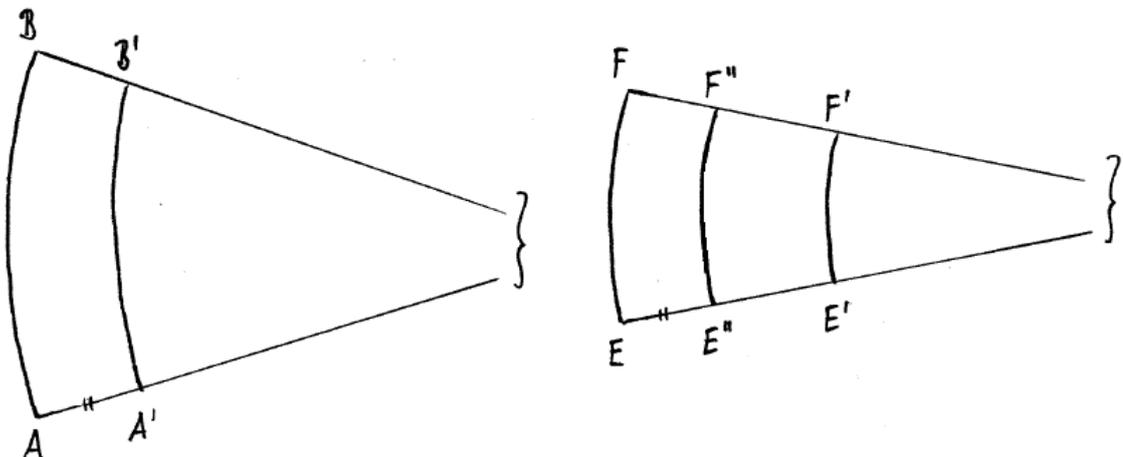
Satz 14.25. *Ein Radius, der einen Grenzkreisbogen teilt, teilt jeden korrespondierenden Grenzkreisbogen im selben Verhältnis.*

Beweis. [Gan73], S. 135ff. □

Satz 14.26. *Das Verhältnis der Längen zweier korrespondierender Grenzkreisbögen hängt nur von ihrem Abstand ab.*

Genauer: Zwei solche Verhältnisse sind genau dann gleich, wenn die Abstände gleich sind, und ungleich, wenn die Abstände ungleich sind. Das größere Verhältnis ist dann zwischen den weiter von einander entfernten Grenzkreisbögen.

Beweis. [Gan73], S. 138ff.



Für die letzte Aussage des Satzes sei oBdA $d(E, E') > d(A, A')$. Dann gibt es natürlich einen Punkt E'' zwischen E und E' mit $d(E, E'') = d(A, A')$, also $l(\widehat{E''F''}) = l(\widehat{A'B'})$, wobei F'' der Punkt des Grenzkreises durch E'' mit dem Radius EF' sei.

Nun ist aber E' in der Richtung der Grenzkreise und damit nach Lemma 14.18 die Sehne

$E'F'$ kürzer als die Sehne $E''F''$. Wegen Lemma 14.4 ist dann auch der Grenzkreisbogen $\widehat{E'F'}$ kürzer als der Bogen $\widehat{E''F''}$. Es folgt

$$\frac{l(\widehat{EF})}{l(\widehat{E'F'})} > \frac{l(\widehat{EF})}{l(\widehat{E''F''})} = \frac{l(\widehat{AB})}{l(\widehat{A'B'})}$$

wie gewünscht. \square

Bemerkung 14.27. Da je zwei Punkten A und A' eine reelle Zahl, nämlich das Verhältnis beliebiger korrespondierender Grenzkreisbögen auf den Grenzkreisen durch A und A' mit Radius AA' , zugeordnet werden kann, gibt es im Gegensatz zur euklidischen Geometrie eine *absolute Länge* ebenso wie es in beiden Fällen eine *absolute Winkelgröße* gibt.

Korollar 14.28. Ist $a = d(A, A')$ und $b = \frac{l(\widehat{AB})}{l(\widehat{A'B'})}$ das Verhältnis zweier korrespondierender Grenzkreisbögen durch A und A' , so gilt für zwei beliebige korrespondierende Grenzkreisbögen \widehat{XY} und $\widehat{X'Y'}$, von denen $X'Y'$ oBdA der kürzere ist:

$$l(\widehat{X'Y'}) = l(\widehat{XY})b^{-\frac{d(X, X')}{a}}.$$

Beweis. Für rationale Werte $\frac{d(X, X')}{a}$ siehe den Beweis von [Gan73], S. 141ff.

Für irrationale Werte beachten wir, dass die Funktion \tilde{l} der Länge in Abhängigkeit des Abstands monoton fallend ist. Sei nun $r = \frac{d(X, X')}{a}$ eine beliebige irrationale Zahl. Es ist $r = \inf\{q \in \mathbb{Q} | q > r\}$, wegen der Monotonie ist dann

$$\tilde{l}(r) \geq \sup\{\tilde{l}(q) \mid q \in \mathbb{Q}, q > r\} = \sup\{l(\widehat{XY})b^{-q} \mid q \in \mathbb{Q}, q > r\} = l(\widehat{XY})b^{-r}.$$

Ebenso ist aber $r = \sup\{q \in \mathbb{Q} | q < r\}$, zusammengenommen ergibt sich Gleichheit. \square

Bemerkung 14.29. Als *Standard-Längeneinheit* wählen wir jetzt den Abstand, den zwei Punkte haben müssen, damit das Verhältnis ihrer Grenzkreisbögen genau e , die Eulersche Zahl, ist. Die hyperbolische Ebene mit dieser Längeneinheit bezeichnen wir als *normierte hyperbolische Ebene*. Als erstes Resultat haben wir dann:

Korollar 14.30. Für zwei beliebige korrespondierende Grenzkreisbögen \widehat{XY} und $\widehat{X'Y'}$ in der normierten hyperbolischen Ebene, die Abstand x haben und von denen $X'Y'$ oBdA der kürzere ist, gilt:

$$l(\widehat{X'Y'}) = l(\widehat{XY})e^{-x}.$$

Die letzten Sätze dieses Kapitels setzen jetzt Längen bestimmter Strecken und Grenzkreisbögen in Verhältnis. Wir erinnern dazu an die Definition eines Standardbogens als eines Bogens \widehat{AD} , dessen Tangente im Anfangspunkt A mit dem Radius durch den Endpunkt D ein Dreieck $AD\delta'$ bildet. Nach Korollar 11.3 schneidet jeder Radius durch einen Punkt $B \in S]A, D[$ die Tangente $A\delta'$ in einem Punkt C .

Satz 14.31. Ist \widehat{AB} ein Grenzkreisbogen in der normierten hyperbolischen Ebene, der kürzer ist als ein Standardbogen und C der Punkt, in dem der Radius durch B die Tangente durch A schneidet, so gelten die Beziehungen

$$e^r = \cosh(t) \quad \text{und} \quad s = S \tanh(t),$$

wobei $s = l(\widehat{AB})$, $r = d(B, C)$, $t = d(A, C)$ und S die Länge eines Standardbogens ist.

Beweis. [Gan73], S. 145ff. □

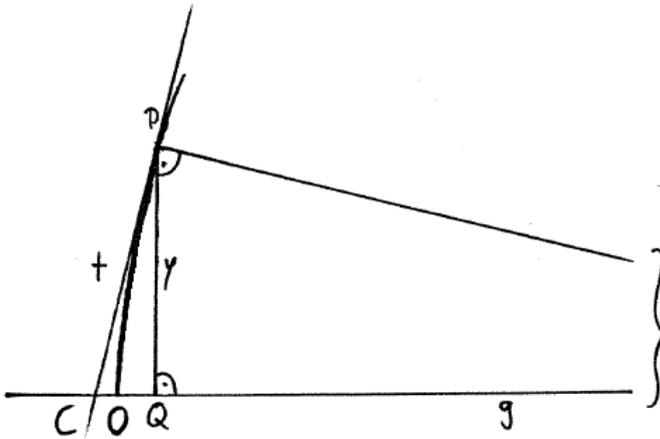
Satz 14.32. Ist \widehat{OP} ein beliebiger Grenzkreisbogen in der normierten hyperbolischen Ebene und Q der Lotfußpunkt von P auf den Radius durch O , so gelten die Beziehungen

$$e^x = \cosh(y) \quad \text{und} \quad s = S \sinh(y),$$

wobei $s = l(\widehat{OP})$, $x = d(O, Q)$, $y = d(P, Q)$ und S die Länge eines Standardbogens ist.

Beweis. [Gan73], S. 148f. □

Wir können mit diesem Wissen noch einmal die Parallelitätswinkelfunktion ansehen. Wir hatten diese bis auf einen Parameter $\kappa < 0$, der von der Wahl der Längen- und Winkel- funktion abhängt, bestimmen können. Es war $\kappa = \Pi'(0)$, wenn wir Winkel im Bogenmaß angeben. Wir wollen nun diese Ableitung ansehen.



Seien eine Gerade g und ein Punkt P mit Abstand $y > 0$ von g in der normierten hyperbolischen Ebene gegeben. Bezeichne Q den Lotfußpunkt von P . Nun definieren g und die rechte Grenzparallele zu g durch P einen Geradenpencil. Wir betrachten den Grenzkreis durch P zu diesem Geradenpencil und erhalten eine Situation wie in Satz 14.32 mit O dem Schnittpunkt von g und dem Grenzkreis.

Trage nun zusätzlich in P die Tangente ein. Ist y kurz genug, nämlich $y < \Delta(\frac{\pi}{4})$, so schneidet diese Tangente die Gerade in einem weiteren Punkt C wie in Satz 14.31. Jetzt ist einerseits die Länge des Bogens $l(\widehat{OP}) = S \sinh(y)$, andererseits auch $l(\widehat{OP}) = S \tanh(t)$, wenn t den Abstand $d(P, C)$ bezeichnet. Es folgt also $t = \operatorname{artanh}(\sinh(y))$.

Nun ist der Winkel $\alpha(y) := \angle QPC$ nach Konstruktion genau $\frac{\pi}{2} - \Pi(y) = \Pi(0) - \Pi(y)$ und damit $\Pi'(0) = \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{\alpha(y)}{y} = -\alpha'(y)$.

Nach dem allgemeinen Prinzip, dass die hyperbolische Geometrie sich in kleinen Diagrammen der euklidischen annähert, liegt die Vermutung nahe, dass $\frac{y}{t} \approx \cos(\alpha(y))$, wenn y klein genug ist, und damit $\kappa = -\alpha'(y) = \frac{d}{dy} \left(-\arccos\left(\frac{y}{\operatorname{artanh}(\sinh(y))}\right) \right)$.

Eine umständliche Rechnung liefert uns $\kappa = -1$, d.h. bei Verwendung der Standardlängeneinheit und des Bogenmaßes erhalten wir die einfachste Parallelitätswinkelfunktion $\Pi(x) = 2 \arctan(\exp(-x))$